

*к.т.н. Полилов Е.В.,
Руднев Е.С.,
Скорик С.П.
(ДонГТУ, г. Алчевск, Украина)*

ВЫБОР ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ В H_∞ -ТЕОРИИ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРИВОДАМИ

У даній статті наведені загальні теоретичні та інженерні рекомендації з вибору частотно-залежних вагових функцій, що використовуються в H_∞ -теорії управління для забезпечення необхідної якості перехідних процесів і надання системі управління властивостей робастності.

***Ключові слова:** вагові функції, робастне управління, функція чутливості.*

В данной статье приведены общие теоретические и инженерные рекомендации по выбору частотно-зависимых весовых функций, используемых в H_∞ -теории управления для обеспечения требуемого качества переходных процессов и придания системе управления свойств робастности.

***Ключевые слова:** весовые функции, робастное управление, функция чувствительности.*

Материал приведенный в статье представляет собой рекомендации для выбора весовых функции в H_∞ -управлении, которые помогают формировать качественные и робастные характеристики в синтезируемой системе. Теоретические сведения относительно функций чувствительности, формирования контура и H_∞ -управления сопровождается общетехническими рекомендациями для выбора весовых функций в H_∞ -теории, кроме того представлены нерешенные проблемы «задания веса» для формирования необходимой частотной и временной характеристик.

Анализ предыдущих исследований. Многие работы, опубликованные после 1984 года, имели теоретические новшества в области робастного управления, в частности H_∞ -управления [1-2]. В 1989 году на основе ряда ключевых результатов в фундаментальной работе [3] была сформулирована новая концепция подхода к решению задачи H_∞ -оптимизации, получившая название «2-Риккати подхода». Суть подхода заключалась в том, что оптимальная задача заменялась субоптимальной.

Кроме того, он позволяет разработчикам в процессе проектирования задавать требуемые характеристики качества и робастной устойчивости замкнутой системы.

Одним из ключевых этапов проектирования H_∞ -управления является формирование весовых функций. Эти весовые функции используются для того, чтобы нормировать входы и выходы и отразить пространственную и частотную зависимость входных возмущений и обработки задания на выходную переменную. К сожалению, в теории автоматического управления выполнена недостаточная работа по обнаружению методов выбора весовых функций, и зачастую только с привязкой к конкретному объекту управления [4].

Цель работы. Создание обобщенных рекомендаций по выбору частотно-зависимых весовых функций в H_∞ -управлении, которые оказывают значительное влияние на качественные характеристики и абсолютную робастную устойчивость, а также на характер протекания переходных процессов регулируемой координаты в синтезируемой робастной системе управления.

Система управления с обратной связью и формирование контура управления (loopshaping). Обобщенная система управления изображена на рис. 1. Эта система может быть представлена как скаляр (одномерная система Single-Input Single-Output, SISO) или системой с переменными параметрами (многомерная система Multiple-Input Multiple-Output, MIMO). Предполагается, что система представлена как инвариантная во времени линейная система (linear time-invariant, LTI) дифференциальных уравнений.

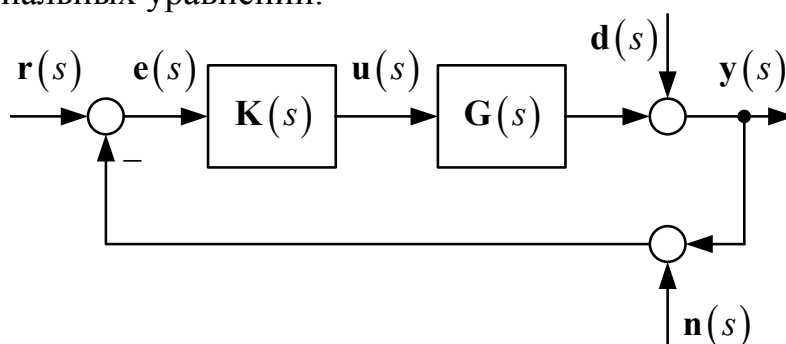


Рисунок 1 – Структурная схема объекта управления

На рис. 1 $G(s)$ - модель физического объекта управления, а $K(s)$ - регулятор. Входными сигналами являются: $r(s)$ - задающее воздействие; $d(s)$ - возмущение; $n(s)$ - шум датчика. Выходная переменная представлена как $y(s)$. Также можно контролировать сигнал ошибки $e(s)$ и сигнал управления $u(s)$.

Алгебраически, выход переменной $y(s)$ может быть выражен:

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} \times \{ \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)\mathbf{r}(s) + \mathbf{d}(s) - \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)\mathbf{n}(s) \}, \quad (1)$$

где \mathbf{I} - единичная матрица.

Аналогично, могут быть выражены сигнал ошибки и управления:

$$\mathbf{e}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} \{ \mathbf{r}(s) - \mathbf{d}(s) - \mathbf{n}(s) \}, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} \times \mathbf{K}(s) \{ \mathbf{r}(s) - \mathbf{d}(s) - \mathbf{n}(s) \}. \quad (3)$$

Определение некоторой общей терминологии:

$\mathbf{L}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)$ - матрица передаточной функции (МПФ) контура (прямого канала);

$\mathbf{S}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1}$ - МПФ чувствительности;

$\mathbf{T}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)$ - матрица дополнительной функции чувствительности (МПФ замкнутой системы).

Заметим, что МПФ замкнутой системы $\mathbf{T}(s)$, устанавливает связь между выходом системы $\mathbf{y}(s)$ и входом сигнала задания $\mathbf{r}(s)$. Эта МПФ также определяет, как шум датчика $\mathbf{n}(s)$ влияет на выход $\mathbf{y}(s)$. Функция чувствительности $\mathbf{S}(s)$ описывает выход $\mathbf{y}(s)$ как функцию входа возмущения $\mathbf{d}(s)$. Она также определяет реакцию ошибки слежения $\mathbf{e}(s)$ на сигнал задания $\mathbf{r}(s)$. Иными словами,

$$\mathbf{S}(s) = \frac{\mathbf{y}(s)}{\mathbf{d}(s)} = \frac{\mathbf{e}(s)}{\mathbf{r}(s)} \quad \text{и} \quad \mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{y}(s)}{\mathbf{r}(s)} = -\frac{\mathbf{y}(s)}{\mathbf{n}(s)}. \quad \text{Отсюда следует, что}$$

$$\mathbf{S}(s) + \mathbf{T}(s) = \frac{1}{1 + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)} + \frac{\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)}{1 + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)} = \mathbf{I}. \quad (4)$$

Таким образом, $\mathbf{T}(s)$ является дополнительной функцией чувствительности, так как \mathbf{T} в сумме с \mathbf{S} равно единице. Выражение (4) является важной зависимостью, которая вводит ограничение на достигаемое качество. Для того чтобы добиться оптимального слежения за сигналом управления и подавления помех, необходимо удерживать \mathbf{S} малой; чтобы система была не чувствительна к шуму датчика и неопределенностям объекта, а также понизить чувствительность управления, необходимо удерживать \mathbf{T} малой. Однако невозможно удерживать малую величину \mathbf{S} и \mathbf{T} на всем частотном диапазоне из-за ограничения $\mathbf{S} + \mathbf{T} = \mathbf{I}$. Таким образом, необходимо определить некоторый компромисс между

минимизацией функции чувствительности и дополнительной функции чувствительности.

Обычно, задающее воздействие и возмущение находятся в низкочастотной области, в то время как шум датчика и неопределенности (т.е. неучтенная динамика в модели объекта) сконцентрированы в высокочастотной области. Компромисс, в случае SISO системы, должен обеспечить малую величину $|S(j\omega)|$ на низких частотах и малую величину $|T(j\omega)|$ на высоких частотах.

H_∞ управление и весовые функции. Теперь необходимо синтезировать регулятор, который обеспечивает вышеупомянутые условия формирования контура (loop-shaping). H_∞ управление – методика синтеза в пространстве состояний, которая использует частотно-зависимые весовые функции, для обеспечения требуемого качества и придания системе свойств робастности. Структурная схема синтезируемой системы H_∞ -управления приведена на рис. 2, где **P** - обобщенная МПФ объекта управления и **K** - МПФ регулятора.

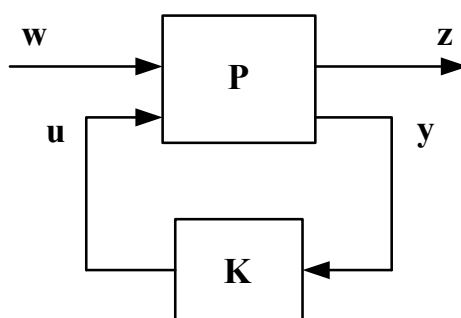


Рисунок 2 – Структурная схема синтезируемой системы

На этой структуре представлены **w** - внешний вход (например, задающее воздействие, возмущение и шум), **z** - выход контролируемой переменной (например, ошибка регулирования и управляющие сигналы), **u** - вход управляющего воздействия, **y** - измеренный выход переменной.

Задача H_∞ -управления найти такой регулятор, который минимизирует бесконечную норму (H_∞ -норма) T_{zw} или $\min \|T_{zw}\|_\infty$ во множестве всех регуляторов **K(s)**, которые стабилизируют замкнутую систему. Таким образом, H_∞ -норма служит мерой усиления системы. H_∞ -норма передаточной функции есть энергия выхода системы при подаче на вход сигнала с единичной энергией. Если выходом является ошибка, а входом возмущение, то минимизируя H_∞ -норму передаточной функции, мы минимизируем энергию ошибки для наихудшего случая входного возмущения [5]. Детализированный алгоритм синтеза робастного **K(s)** регулятора рассмотрен авторами в [6].

Весовые функции являются рациональными, устойчивыми, минимально-фазовыми передаточными функциями. На рис. 3 приведена функция чувствительности ограниченная по амплитуде весовой функцией чувствительности $\mathbf{W}_S(s)$, т.е. $\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) \leq \gamma \underline{\sigma}(\mathbf{W}_S^{-1}(j\omega))$.

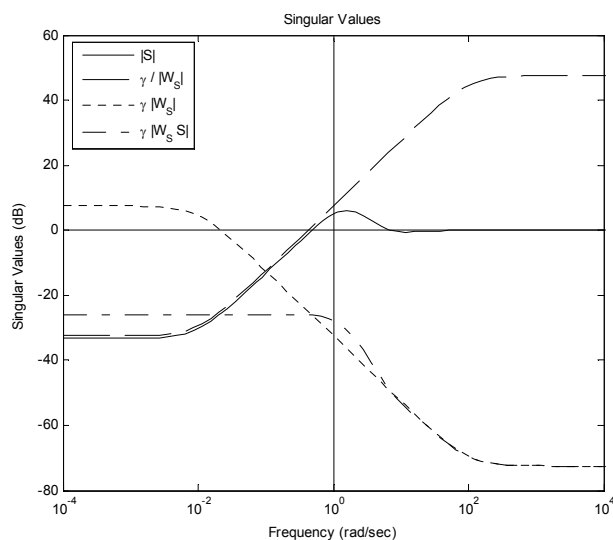


Рисунок 3 – Сингулярные значения функции чувствительности и ее произведения с \mathbf{W}_S

Эта верхняя грань амплитуды инвертирована, чтобы получить весовую функцию чувствительности $\mathbf{W}_S(s)$. Итак, если $\mathbf{S}(s)$ умножить на весовую функцию $\mathbf{W}_S(s)$, то амплитуда $\mathbf{W}_S \mathbf{S}(s)$ будет меньше или равна чем единица на всей частоте. Этот пример называют «весовой задачей чувствительности» так как H_∞ -регулятор минимизирует максимальную величину $\mathbf{W}_S \mathbf{S}(s)$ на всей частоте (т.е. $\min \|\mathbf{W}_S \mathbf{S}\|_\infty$).

Аналогично определяют весовую дополнительную функцию чувствительности $\mathbf{W}_T(s)$. В H_∞ -управлении проектировщик выбирает, какие внешние входы и управляемые выходы минимизировать, следовательно выбор весовых функций оказывает сильное влияние на синтез и структуру регулятора, а также на придание системе свойств робастности.

Общие рекомендации для выбора весовых функций.

Весовая ПФ функции чувствительности от входа задания до выхода ошибки слежения $\mathbf{W}_S(s)$, выбирается для того чтобы отобразить желаемые характеристики качества (время установления и т.п.). Функция чувствительности должна иметь малый коэффициент усиления на низких частотах для оптимального слежения и большой коэффициент усиления на высоких частотах для ограничения перерегулирования. Это выполняется выбором весовой функции \mathbf{W}_S , которая отражает желаемую форму функции чувствительности.

Низкочастотный вес, используемый в функции чувствительности с низкочастотной амплитудой, приблизительно равен инверсии желаемой установившейся ошибки слежения и высокочастотного коэффициента усиления, установленного для ограничения перерегулирования. То есть, чем больше амплитуда коэффициента усиления, тем больше ограничивается перерегулирование.

Как показывает опыт, высокочастотный коэффициент усиления весовой функции чувствительности должен находиться в пределах $(0,1;0,5)$, для эффективного ограничения перерегулирования и обеспечения высокого быстродействия.

Частота среза весовой функции чувствительности, должна быть выбрана так, чтобы компенсировать постоянную времени замкнутой системы.

Реакцию системы на входное задающее воздействие и входной шум датчика задает дополнительная функция чувствительности T . Для хорошего слежения $T \approx 1$, а для подавления шумов $T \approx 0$.

Дополнительной функции чувствительности необходим вес, для придания системе свойств робастности (например, нечувствительности к шуму датчиков и неучтенной динамики в модели объекта). Поскольку энергия шума датчика сконцентрирована в высокочастотной области, а входной сигнал задания находится в низкочастотной области, то для дополнительной функции чувствительности используется высокочастотный вес. Эта весовая функция обеспечивает значение дополнительной функции чувствительности приблизительно равное единице на низкой частоте. Амплитуда этой весовой функции на низкой частоте может ограничить реакцию системы. Например, коэффициент усиления низкочастотной области весовой дополнительной функции чувствительности $W_T(s)$, может быть принят инверсией максимально допустимого значения параметра системы (например, максимальный ток). Частота среза весовой дополнительной функции чувствительности, выбирается так чтобы ограничить полосу пропускания замкнутой системы. Например, амплитуда в высокочастотной области $W_T(s)$, может быть принята как инверсия требуемого высокочастотного подавления помех.

Используя весовые функции чувствительности и дополнительной чувствительности, важно удостовериться, что значение амплитуды, где пересекаются эти весовые функции, было меньше единицы. Это условие необходимо, чтобы предотвратить нарушение закона сохранения (4).

Алгоритм выбора параметров $(A, M, \omega_0 (L))$ весовых функций представлен на рис. 4.

Типичные весовые функции:

$$\mathbf{W}_S = \frac{s/M + \omega_0}{s + \omega_0 A}; \quad \mathbf{W}_R = const; \quad \mathbf{W}_T = \frac{s + \omega_0/M}{As + \omega_0} = \frac{Ls + 1}{2(0.5Ls + 1)}; \quad (5)$$

где $A < 1$ – желаемая максимально допустимая ошибка в установившемся режиме; ω_0 – желаемая полоса пропускания; M – пик чувствительности.

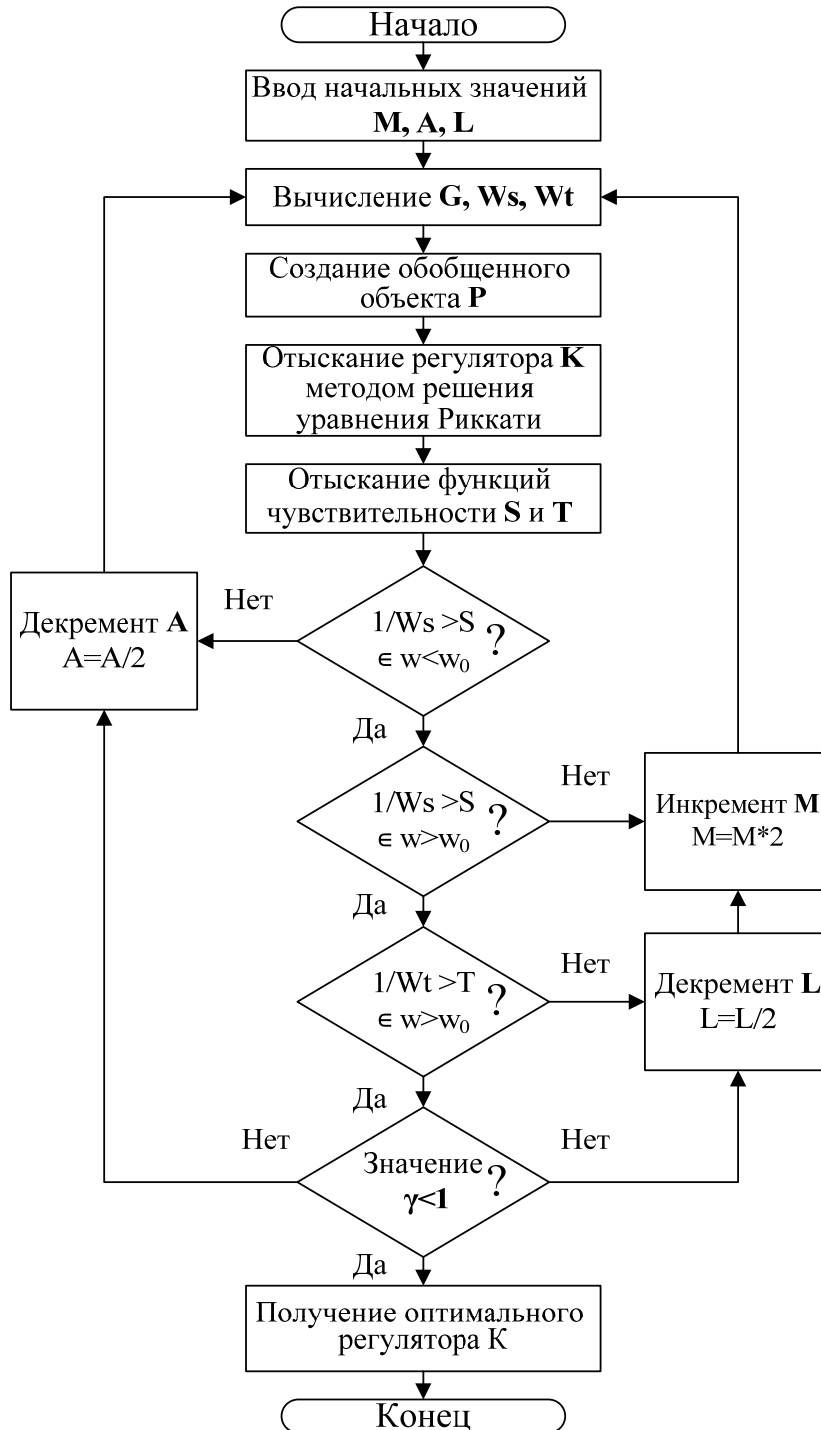


Рисунок 4 – Алгоритм выбора параметров весовых функций

Синтез робастного H_∞ -субоптимального регулятора скорости электропривода постоянного тока. Синтез робастной системы управления электроприводом постоянного тока приведен в [5]. На рис. 5 приведена структурная схема задания весовых функций в систему управления с обратной связью (смешанная задача $\mathbf{S} / \mathbf{R} / \mathbf{T}$).

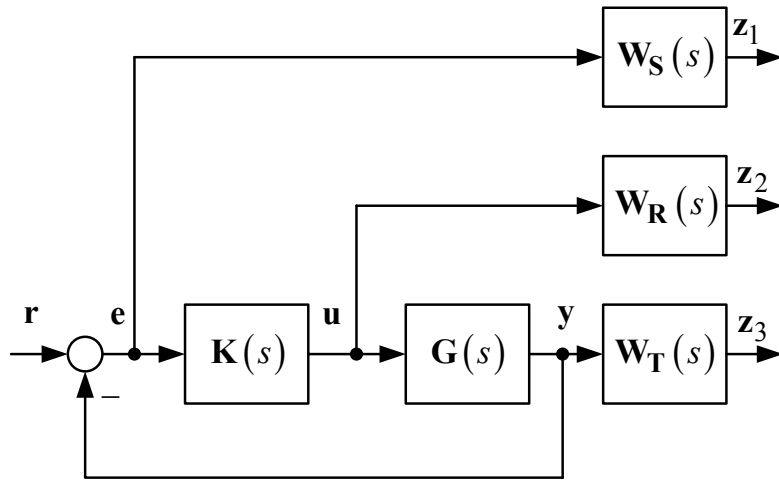


Рисунок 5 – Блок-схема смешанной задачи $\mathbf{S} / \mathbf{R} / \mathbf{T}$ (для синтеза)

Замкнутая МПФ $\mathbf{T} = \mathbf{F}_L(\mathbf{P}, \mathbf{K})$ от входа возмущения \mathbf{w} до выхода ошибок (контролируемая переменная) \mathbf{z} и обобщенный объект $\mathbf{P}(s)$:

$$\begin{bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ z_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_S(s)\mathbf{S}(s) \\ \mathbf{W}_R(s)\mathbf{R}(s) \\ \mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s) \end{bmatrix} \mathbf{r}(s); \quad \mathbf{P}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W}_S & -\mathbf{W}_S\mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{W}_R \\ 0 & \mathbf{W}_T\mathbf{G} \\ \hline \mathbf{I} & -\mathbf{G} \end{array} \right]. \quad (6)$$

где $\mathbf{S}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}$ - функция чувствительности;

$\mathbf{T}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)(\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}$ - дополнительная функция чувствительности;

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{K}(s)(\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}.$$

При проектировании робастной САУ использовались средства пакета Robust Control Toolbox системы Matlab, позволяющие вычислить H_∞ -субоптимальный регулятор по алгоритму представленному в работе [5]. На рис. 6 ÷ 11 представлены результаты работы электропривода с синтезированным H_∞ -субоптимальным регулятором для различных видов задающего воздействия, сингулярные значения функции чувствительности, дополнительной функции чувствительности и соответствующих весовых функций, а также приведены семейства переходных характеристик при вариации параметров весовых функций.

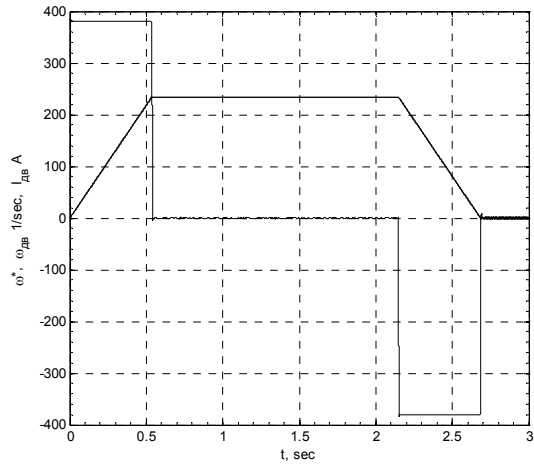


Рисунок 6 – Отработка САР за-
данной траектории

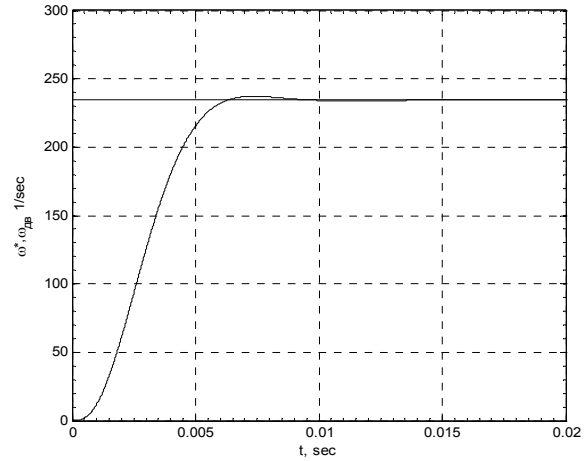


Рисунок 7 – Реакция системы ЭП
на скачок управления

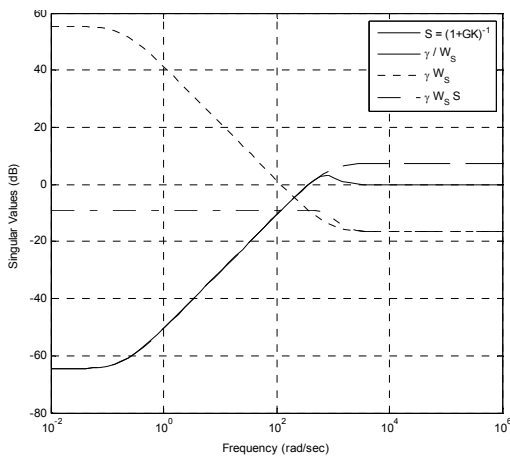


Рисунок 8 – Сингулярные значе-
ния функции чувствительности

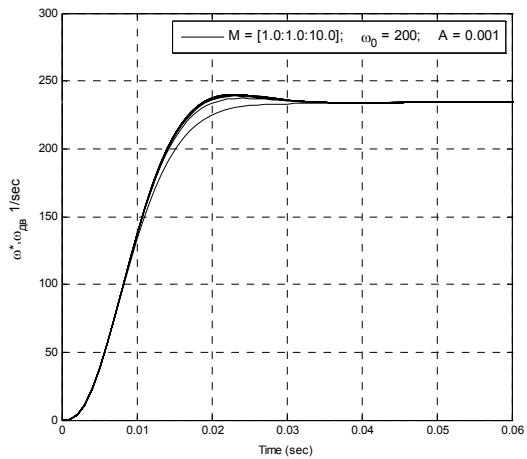


Рисунок 9 – реакция САР на скачок
при вариации параметра M весовых
функций

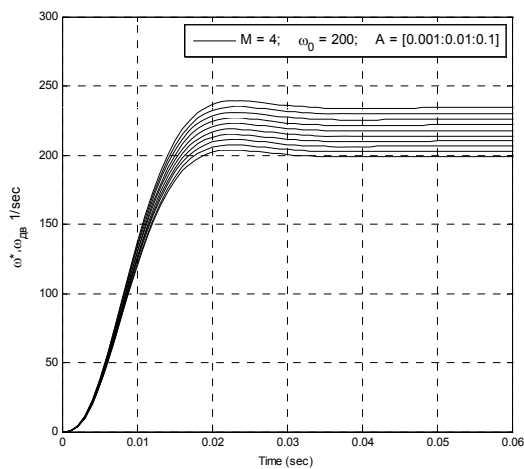


Рисунок 10 – реакция САР на ска-
чок при вариации параметра A ве-
совых функций

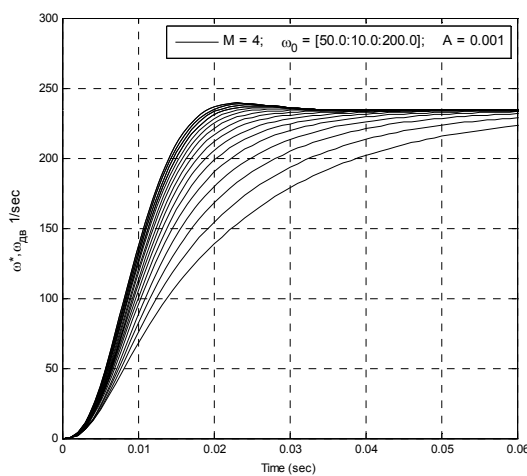


Рисунок 11 – реакция САР на ска-
чок при вариации параметра ω_0 ве-
совых функций

Выводы. В данной статье изложен обобщенный материал по выбору весовых функций в H_∞ -управление применительно к электроприводу постоянного тока. Показано, что весовые функции являются «органами управления/настройки» характеристик качества и устойчивости робастной системы управления. Приведены практические рекомендации для формирования весовых функций, которые в свою очередь формируют частотные характеристики системы управления. При использовании данных принципов процесс синтеза робастной системы управления с заданными показателями качества значительно упрощается. Предложен алгоритм для автоматического выбора параметров весовых функций. Показана неоднозначность задачи выбора весовых функций, требующей для своего решения достаточного опыта разработчика, а также применения метода проб и ошибок.

Библиографический список

1. Dorato Peter. *A Historical Review of Robust Control* / P. Dorato // *IEEE Control Systems Magazine*, April 1987– P.44-47.

2. Ohlmeyer E.J. *Robust Control Theory: Current Status and Future Trends* / E.J. Ohlmeyer // *NAVSWC MP 90-385, Naval Surface Warfare Center, Dahlgren, VA, June 1990.*

3. Doyle J.C. *State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems* / J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis // *IEEE Trans. Automat. Control.* – 1989. – Vol.34.No8. – P.831-847.

4. Grimble M.J. *Selection of Optimal Control Weighting Functions to Achieve Good H_∞ Robust Designs* / M.J. Grimble, D. Biss // *Proceedings of IEEE International Conference Control 88, Conference Publication № 285, April 1988.*

5. Полилов Е.В. *Робастное управление синхронным электроприводом на основе H_2 - и H_∞ -оптимизации* / Е.В. Полилов, Е.С. Руднев, С.П. Скорик // *Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Електротехніка і енергетика».* – Донецьк: ДонНТУ, 2011. – Випуск 11 (186). – С. 305-314.

6. Полилов Е.В. *Синтез робастного H_∞ -субоптимального регулятора положения позиционного электропривода* / Е.В. Полилов, А.Б. Зеленов, Е.С. Руднев // *Вісник КДТУ ім. Михайла Остроградського.* – Кременчук: КДПУ, 2008. – Вип. 3/2008 (50) частина 1. – С.64-71.

Рекомендована к печати д.т.н., проф. В.Д. Луциком