

УДК 69(06):691.327:620.193.000.57:628.14:699.87

к.т.н. Хвортова М.Ю.,

д.т.н. Дрозд Г.Я.,

к.т.н. Буряк В.Г.

(ИСАиЖКХ ЛГУ им. В. Даля, г. Луганск, ЛНР, [drozd.g@mail.ru](mailto:drozdg@mail.ru)),

д.т.н. Братчун В.И.

(ДонНАСА, г. Макеевка, ДНР, bratv09@yandex.ua)

ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ ЗАЩИТЫ ОТ БИОХИМИЧЕСКОЙ КОРРОЗИИ БЕТОННЫХ ТРУБ КАНАЛИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Выполнено исследование влияния общих факторов на формирование и развитие нестационарного процесса биокоррозии бетонных изделий, эксплуатация которых происходит в условиях размножения микроорганизмов-биодеструкторов на фоне пористой структуры бетона по схеме цепной реакции в пределах аэробной – жидкостно питательной среды с опосредованным учётом переменного водородного показателя pH. Дана количественная оценка величины предельного диаметра бетонной трубы, которая определяет, в зависимости от биохимических, биофизических и технологических параметров процесса биодеструкции, начало цепной микробиологической реакции. Полученные результаты позволяют непосредственно влиять на технологию производства средств защиты бетонных труб с минимально рациональной толщиной стенки при наличии арматурного каркаса (в частности, применение технологии флюатирувания).

Ключевые слова: биокоррозия, бетон, канализационный коллектор, биодеструкция, флюатирувание.

Введение. Проблема биокоррозии особенно железобетонных канализационных коллекторов, используемых в подземных городских сооружениях, приобретает определенную актуальность как предмет теоретических исследований в связи с наличием эффекта масштаба и риска экологической катастрофы [1-4]. При этом надо иметь в виду два опасных фактора. Во-первых, функционирование промышленных предприятий неизбежно сопровождается выбросами в окружающее пространство вредных химически активных веществ в виде жидкости, газа и пыли, что в конечном итоге после некоторого цикла физико-химических трансформаций становится питательной средой для различных популяций бактерий, которые заселяют бетон канализационных систем извне и способствуют развитию микробиологических процессов разрушения бетона. Во-вторых, функциональная особенность канализационных коллекторов заключается в сборе и отводе в зону очистки сточных

вод, которые являются агрессивной средой с большим интервалом значений изменения водородного показателя pH, который обеспечивает при $\text{pH} < 1,5$ прямую химическую реакцию образования серной кислоты, а при значениях $\text{pH} < 13$ обеспечивает комплексный процесс коррозионной деструкции бетона, начиная с углекислотной коррозии [1], когда разрушается плёнка углекислого кальция, который обладает высокой щелочностью $\text{pH} = 11-13$ и блокирует диффузию микроорганизмов-биодеструкторов в бетонную массу, далее последовательно наступают этапы, такие, как этап карбонизации с предельным значением $\text{pH} = 9-9,5$, начальный этап микробиологической коррозии с $\text{pH} = 4-5$ и этап прогрессирующего разрушения бетона, характеризующийся снижением водородного показателя до значения $\text{pH} = 3$. Реакции микробиологического характера, которые разрушают бетон, составляют в последние десятилетия (конец XX-начало XXI века) предмет исследования ведущих

отечественных и иностранных научных школ, особенно в Германии, США и Японии, что мотивировано необходимостью получения фундаментальных теоретических и экспериментальных результатов по биодеструкции с целью формирования технологий по защите и увеличению сроков эксплуатации бетонных сооружений. Основное направление деятельности указанных научных школ связано с необходимостью исследования системы микробиологических и химических процессов, которые приводят к разрушению бетонных канализационных сооружений, а также временную иерархию его заселения микроорганизмами-биодеструкторами. Но научные исследования микробиологических процессов проводятся с отрывом от реальных условий эксплуатации канализационных коллекторов, т. е. исследование динамики заселения бетона канализационных систем биодеструктором выполняется в виде модельных экспериментов в лабораторных условиях с использованием искусственно полученных штаммов микроорганизмов или сводится к выявлению некоторых случайных групп микроорганизмов в образцах разрушенных объектов. Японскими исследователями были предприняты попытки по внедрению штаммов микроорганизмов в агрессивную среду действующего канализационного коллектора сложившимся микробоценозом биодеструкций, но этот эксперимент носил единичный характер в связи с опасностью инфицирования исследователей и наличием технологических проблем при многократном повторении наблюдений. Несмотря на отсутствие системного подхода, специалисты по проблемам биокоррозии [5] сделали попытку классификации наиболее активных штаммов микроорганизмов, которые в хронологической последовательности вытесняют один другого в зависимости от глубины разрушения бетона и внешних параметров среды. Анализ ассоциативных данных, полученных в указанных исследованиях, показал недостаточ-

ность и неэффективность результатов использования исключительно технологий эксперимента для формулирования корректной универсальной аналитической модели биокоррозии бетона с возможностью практической апробации рекомендаций общего характера для прогнозирования процесса разрушения бетона в реальных условиях эксплуатации канализационных систем. Как было отмечено в работах, микробная среда как фактор биодеструкции бетона, имеет значительно более сложную структуру, чем это представлялось специалистам экспериментального направления исследований. Такое предположение получило подтверждение в молекулярно-биологических исследованиях бетонных изделий в состоянии прогрессирующей биокоррозии, когда были обнаружены качественно новые штаммы микроорганизмов, которые находились за пределами лабораторного этапа культивации и которые способствовали чрезвычайно быстрому разрушению бетона, который носил характер цепной реакции. Таким образом, полная картина биодеструкции канализационных сооружений характеризуется взаимодействием главной группы биодеструкторов в виде тионовых бацилл, которые продуцируют серную кислоту, с гетеротрофными бактериями, с грибами-микромикантами, что имеет своим следствием формирование в теле бетона агрессивной среды, которая самовосстанавливается за счёт стоков. Феноменологическое представление о биодеструкции бетона, согласно статье [2], имеет следующие основные черты. Прежде всего, это утверждение, что микробиологическая коррозия является первоначальной, а химическая коррозия представляет собой вторичный процесс. Действительно, соблюдение рассуждения о том, что первоначальной причиной разрушения бетонных и металлических канализационных сооружений является сероводород и серная кислота, то есть имеет место химическая коррозия на уровне жидкостной диффузии в пористой

среде бетона, нивелирует микробиологическую природу происхождения этих агрессивных химических соединений и приводит к спонтанному заселению бетонных конструкций биодеструктором с негативными последствиями по сокращению сроков эксплуатации указанных объектов и их быстрому разрушению. С этой точки зрения невозможно объяснить также факт катастрофически быстрого разрушения канализационных сооружений не соответствующего параметрам жидкостной диффузии. Феноменологическое моделирование биокоррозии в бетонных канализационных сооружениях основывается на представлении, что бетон заселяется и разрушается штаммами бактерий, циклы жизнедеятельности которых синхронизированы во времени в соответствии со снижением водородного показателя pH, увеличения степени пористости бетона и снижения его механической прочности. Во многих публикациях по проблеме биодеструкции бетонных сооружений [1, 2, 5] авторы придерживаются утверждения, что наиболее эффективными биодеструктором является Тион бациллы (*Thiobacillus*), которые представляют собой многочисленную группу бактерий, различающиеся по способности существовать в условиях повышенной кислотности среды. В статье [5] приведена классификация тионовых бактерий на два класса: класс нейтрофильных бактерий, который растёт и размножается при значениях pH 9-4, и класс ацидофильных бактерий, для которого нижняя граница существования определяется значением pH 0,5, т. е. при заселении бациллами тела бетона происходит хронологическое изменение нейтрофильных тиобацилл ацидофильными. При этом, благодаря действию ферментов, которые выделяются нейтрофильными тиобациллами, показатель pH уменьшается до 7. Далее, начиная с pH 7, процесс зарождения, размножения, развития и последовательной смены различных типов тионовых бактерий *Thiobacillus*, который проводится по схеме: *neapolitanus*,

thioparus, *thioxidans*, происходит в ассоциативной связи с циклом заселения бетона грибами-микромикетов, продуцирующих в микротрещинах поверхностного слоя, увеличивая пористость бетона, и способствующих прикреплению других микроорганизмов и проникновению вглубь бетона соответствующих ферментов. Снижение значения pH до 5-4,5 сопровождается значительным сокращением численности нейтрофильных тиобацилл (*neapolitanus*, *thioparus*) и появлением основного продуцента серной кислоты – группы ацидофильных бактерий (*thioxidans*), что является признаком процесса интенсивного разрушения бетона канализационных сооружений [2]. Химический аспект разрушения бетонных изделий в условиях действия биодеструкторов заключается во взаимодействии гидрат окиси кальция с серной кислотой и образованием гипса и потерей механической прочности. Таким образом, анализ последних публикаций по проблеме биодеструкции бетона канализационных систем приводит к следующему выводу:

1. Основными факторами разрушения бетонных канализационных конструкций является биохимическая коррозия (наличие сероводорода и серной кислоты, которая обусловлена жизнедеятельностью различных групп нейтрофильных сероокисляющих бактерий – *Thiobacillus*, *Thiomonas* и др.), грибная коррозия (заселение бетона грибами-микромикетов, которое сопровождается механическим разрушением канализационных систем), и грибобиохимическая коррозия (разрушительный синергетический эффект ассоциативного взаимодействия грибов-микромикетов и серо-окисляющих бактерий, которое способствует как размножению грибов, так и увеличению репродуктивности бактерий в широком интервале pH 13-4,5).

2. Лабораторные эксперименты, связанные с исследованиями определенных аспектов биокоррозии бетонных изделий, в своем большинстве имеют декоративный ограниченный характер и выборочную

цель, не позволяющую квалифицировать их результаты на уровне общих рекомендаций по уменьшению активности биокоррозии в практической плоскости, то есть, на стадии проектирования и дальнейшей эксплуатации канализационных коллекторов.

3. Чрезвычайная актуальность проблемы защиты бетона канализационных систем от биохимической коррозии требует строгого модельного подхода к созданию аналитического аппарата исследования зависимости макропараметров и микропараметров заселения тионовыми бациллами тела бетона, с использованием фундаментальных законов газовой и жидкостной диффузии в пористых средах, имеющих заданную геометрическую конфигурацию и заданное состояние процесса на границе раздела фаз.

Постановка проблемы математической модели процесса биохимической деструкции бетона канализационных коллекторов требует выполнения двух требований общего характера: во-первых, это феноменологическое описание эволюции заселения микроорганизмами бетонной конструкции, а во-вторых, это аналитическое описание соответствующих законов сохранения с применением полуфеноменологического подхода, который учитывает несколько допущений и ограничений модельного характера.

Таким образом, формулировка задачи сводится к следующему: для бесконечной бетонной цилиндрической трубы $T_u: r_1 \leq r \leq r_2, -\infty < z < +\infty$, где r_1, r_2 соответственно внутренний и внешний диаметры трубы необходимо найти функцию концентрации тиобацил $n = n(M, t) = n(r, \varphi, z, t)$, где (r, φ, z) – цилиндрические координаты точки $M(x, y, z)$ трубы T_u , x, y, z – декартовы прямоугольные координаты, $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$, удовлетворяющие нестационарному дифференциальному уравнению диффузии

$$c(M) \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D(M) \operatorname{grad} n(M, t)) + \gamma(M) n(M, t), \quad (1)$$

где $c(M)$ – коэффициент пористости бетона; $D(M)$ – коэффициент диффузии тиобацил; $\gamma(M)$ – коэффициент размножения тиобацил.

$r_1 < r < r_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty$, для момента времени $t > 0$, когда на внутренней и внешней поверхностях поддерживается концентрация

$$\begin{aligned} n(r_1, \varphi, z, t) &= f_1(\varphi, z, t), \\ n(r_2, \varphi, z, t) &= f_2(\varphi, z, t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty, t \geq 0$$

или заданы плотности потоков микроорганизмов

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(r_1, \varphi, z, t)}{\partial r} &= q_1(\varphi, z, t), \\ \frac{\partial n(r_2, \varphi, z, t)}{\partial r} &= q_2(\varphi, z, t), \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty, t \geq 0,$$

при этом в начальный момент времени распределение концентрации имеет вид

$$\begin{aligned} n(r, \varphi, z, 0) &= f_0(r, \varphi, z) \\ r_1 \leq r \leq r_2, -\infty < z < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом сохраняется возможность комбинирования граничных условий I-го (2) и II-го (3) рода, то есть рассматривается смешанная задача. Корректность постановки задачи (1)-(4) означает существование, однозначности и устойчивости решения дифференциального уравнения (1). Степень деструкции бетона будет определяться концентрацией серной кислоты

$$n_{s.a.} = n_{s.a.}(M, t) = n_{s.a.}(r, \varphi, z, t) \quad (5)$$

основным продуктом, которого являются Тионовые бациллы с концентрацией $n = n(M, t) = n(r, \varphi, z, t)$. Дифференциальное уравнение для определения величины

$n_{s.a.} = n_{s.a.}(M, t) = n_{s.a.}(r, \varphi, z, t)$ (5) имеет вид

$$\frac{\partial n_{s.a.}(M, t)}{\partial t} = n(M, t), \quad (6)$$

$$n_{s.a.}(M, 0) = 0,$$

где $\vartheta > 0$ – параметр, определяющий скорость образования серной кислоты.

Результаты исследования. Исследование проблемы биодеструкции бетона канализационных сооружений будет выполнено в данной работе на уровне решения нестационарного дифференциального уравнения диффузии (1), как математической модели процесса заселения микроорганизмами (тиобацилами) тела бетона с учётом начальных (4) и граничных условий (2) или (3). При этом надо иметь в виду, что дифференциальное уравнение (1) имеет общий характер и его решение не может быть представлено в аналитическом виде (в квадратурах). В связи с этим, в математическую модель (1)-(4) введём ряд допущений математического, физического и химико-микробиологического характера, которые позволят найти решение данной модели, без нарушения условий корректности в конечной форме в первом приближении и провести как качественный, так и количественный анализ процесса диффузии тиобацил в пористом теле бетона, используя результаты статей [5-8].

Сформулируем, прежде всего математические и физические требования для модели (1)-(4):

1. Допускаем, что процесс диффузии аэробных тиобацилл осуществляется в бесконечной пористой цилиндрической бетонной трубе $T_u: r_1 \leq r \leq r_2, -\infty < z < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, где r_1, r_2 соответственно внутренний и внешний диаметры, $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, причём в любом сечении трубы плоскостью, ортогональной её оси, этот процесс инвариантен, то есть описывается одинаковым набором параметров с неизменными, относительно расположения сечений, значениями.

Итак, исследование дифференциального уравнения (1) будет проводиться в цилиндрической системе координат $(r, \varphi, z), 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty$: с учётом плоского случая. Это означает, что произвольная переменная данной задачи вида $A(r, \varphi, z)$ зависит только от независимых переменных r, φ , то есть $A(r, \varphi, z) \equiv A(r, \varphi)$, а произвольная переменная вида $B(r, \varphi, z, t)$ зависит только от независимых переменных r, φ, t , то есть $B(r, \varphi, z, t) \equiv B(r, \varphi, t)$.

2. Предполагаем, что пористое тело бетона T_u является однородной средой, то есть коэффициент пористости бетона $c(r, \varphi)$, коэффициент диффузии тиобацил $D(r, \varphi)$ и коэффициент размножения тиобацил $\gamma(r, \varphi)$ не зависят от пространственных переменных r, φ и являются постоянными усредненными величинами: $c(r, \varphi) \equiv c = const, D(r, \varphi) \equiv D = const, \gamma(r, \varphi) \equiv \gamma = const$. Это предположение соответствует уровню „строгости” этой модели, когда вместе с дифференциальным уравнением диффузии (1) не рассматривается дифференциальное уравнение теплопроводности для неизвестной функции температуры $u = u(r, \varphi, t)$ бетонной трубы T_u и дифференциальное уравнение для неизвестной функции $(pH)(r, \varphi, t)$, описывающий кислотно-щелочные свойства пористой среды бетона. Рассмотрение указанной системы трёх дифференциальных уравнений не повлияет на качественные свойства решения дифференциального уравнения (1), но будет способствовать переопределению количественных характеристик задачи.

Требования по химико-микробиологической составляющей модели (1)-(4) сводятся к следующему:

1. Учитывая иерархические изменения в процессе заселения бетонной трубы T_u различных типов Тионовых бактерий в за-

висимости от значения водородного показателя pH и последовательно придерживаясь модельного подхода к проблеме биодеструкции бетона канализационных систем, полагаем, что весь спектр серноокислительных бактерий, который включает такие типы как *Thiothrix*, *Thiobacillus*, *Thiomicrospira*, *Thiomonas*, *Beggiatoa* и др. представляет в диффузионном процессе заселение бетона некоторое гипотетическое унифицированное семейство бацилл *Unibacillus*, что имеет только такие особенности указанных микроорганизмов, как способность поселяться и размножаться в кислотно-щелочной среде и производить серную кислоту. При этом зависимость концентрации бацилл *Unibacillus* от макропараметров задачи, как водородного показателя pH, температуры Θ среды бетона и других, на каждом из фиксированных промежутков их значений отражает реальную зависимость соответствующих групп тиобацилл, что в данной модели фиксируется косвенно в терминах начальных и граничных условий. Количество и скорость образования серной кислоты в процессе жизнедеятельности бацилл *Unibacillus* определяют фронт и динамику разрушения бетона, которое происходит во времени и пространстве и является ассоциативным следствием действия совокупности физических, химических и биохимических аспектов биохимической коррозии. В связи с этим, введём в рассмотрение понятие *степени разрушения бетона канализационных конструкций*:

I-я ступень (заселение бетона бациллами *Unibacillus*, бетон сохраняет механическую прочность, $0 \leq \langle n_{s.a.} \rangle \leq n^{(1)}$);

II-я ступень (ослабление механической прочности бетона, $n^{(1)} < \langle n_{s.a.} \rangle \leq n^{(2)}$);

III-я ступень (разрыхление и разрушение бетона, $n^{(2)} < \langle n_{s.a.} \rangle \leq n^{(3)}$).

В приведенных оценках параметры $n^{(k)}$, $k=1,2,3$ имеют эмпирический харак-

тер и $n^{(1)} < n^{(2)} < n^{(3)}$, а символ $\langle n_{s.a.} \rangle$ означает среднее значение величины $n_{s.a.}(M, t)$ (5). Пусть $t^{(k)}$, $k=1,2,3$ – моменты времени, которые определяют величину временных промежутков $t \in [0, t^{(k)}]$, соответствующих степеней разрушения единицы объема бетонной трубы T_y , тогда значение параметра $t^{(k)}$ находится как решение уравнения относительно переменного t

$$\frac{1}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^t d\tau \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-l}^l dn_{s.a.}(r, \varphi, z, \tau) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} n^{(k)},$$

$k = 1, 2, 3.$ (7)

В плоском случае уравнение (7) принимает вид

$$n^{(k)} = \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^t d\tau \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi n_{s.a.}(r, \varphi, \tau),$$

$k = 1, 2, 3.$ (8)

2. Взаимодействие группы биодеструкторов *Thiothrix*, *Thiobacillus*, *Thiomicrospira*, *Thiomonas*, *Beggiatoa* и др., обобщенных в виде бацилл *Unibacillus*, с гетеротрофными бактериями и с грибами – микромицентами, следствием которого является формирование и активизация микробной среды в бетонных канализационных сооружениях, в предлагаемой модели будет учитываться с помощью граничных условий.

3. Предполагаем, что промежуток времени, который соответствует требованиям корректности решения дифференциального уравнения диффузии (1), определяется величиной параметра полного разрушения бетона $t_{des} \equiv t^{(3)}$.

Исходя из математических ограничений модели (1)-(4) выпишем дифференциальное уравнение диффузии (1) в виде

$$\frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = a^2 \Delta_3 n(M, t) + b n(M, t), \quad (9)$$

где $a^2 \equiv \frac{D}{c}$ – коэффициент биодиффузии, $b \equiv \frac{\gamma}{c} > 0$ – коэффициент размножения

Unibacillus, $\Delta_3 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – трёхмерный лапласиан.

Учитывая, что в плоском случае функция концентрации бацилл $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ не зависит от переменной z , то есть $u(M, t) \equiv u(x, y, t)$, перепишем уравнение (9) в виде

$$\frac{\partial n(x, y, t)}{\partial t} = a^2 \Delta_2 n(x, y, t) + b n(x, y, t), \quad (10)$$

где $\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный лапласиан.

В полярной системе координат (r, φ) лапласиан $\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ имеет вид

$$\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (11)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение диффузии (10), дополненное начальными и граничными условиями типа (4) и (2), можно квалифицировать как первое краевое задание: найти решение $n(r, \varphi, t)$ дифференциального уравнения диффузии

$$\frac{\partial n(r, \varphi, t)}{\partial t} = a^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n(r, \varphi, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n(r, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} \right] + b n(r, \varphi, t), \quad (12)$$

которое удовлетворяет начальному условию

$$n(r, \varphi, 0) = f_0(r, \varphi), \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (13)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} n(r_1, \varphi, t) &= f_1(\varphi, t), \\ n(r_2, \varphi, t) &= f_2(\varphi, t) \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Легко видеть, что в выражениях (13) и (14) функция $f_0(r, \varphi)$ принадлежит классу, а функции $C([r_1, r_2] \times [0, 2\pi])$ принадлежит классу $C([0, 2\pi] \times [0, \infty))$.

Переформулируем задачи (12)–(14) в терминах новой неизвестной функции $\tilde{n}(r, \varphi, t)$, определяемой с помощью соотношения

$$n(r, \varphi, t) = \tilde{n}(r, \varphi, t) \exp(bt). \quad (15)$$

С учётом (12)–(14), (15), дифференциальное уравнение диффузии для новой неизвестной функции $\tilde{n}(r, \varphi, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{n}(r, \varphi, t)}{\partial t} = a^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{n}(r, \varphi, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{n}(r, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} \right], \quad (16)$$

с начальным условием

$$\begin{aligned} \tilde{n}(r, \varphi, 0) &= f_0(r, \varphi), \\ r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (17)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{n}(r_1, \varphi, t) &= f_1(\varphi, t) \exp(-bt), \\ \tilde{n}(r_2, \varphi, t) &= f_2(\varphi, t) \exp(-bt), \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Нахождение и исследование решения основной (12)–(14) и модифицированной (16)–(18) моделей удобно провести по методу редукции, то есть представить данную задачу как некоторую совокупность более простых заданий, каждое из которых является уточнением предыдущей задачи и основой для формулирования дальнейшей задачи с анализом качественных и количественных оценок и соответствующих практических применений.

В данной работе в качестве первого элемента редукции рассмотрим следующее *вспомогательное задание*: найти решение

$n(r, \varphi, t)$ дифференциального уравнения диффузии бацилл *Unibacillus* в бесконечном бетонном цилиндре в тонком слое вблизи наружной поверхности:

$r_2 - \Delta < r < r_2$, $\frac{\Delta}{r_2} \ll 1$ (вырожденный случай цилиндрической бетонной трубы, когда внутренний диаметр $r_1 \rightarrow +0$)

$$\frac{\partial n(r, \varphi, t)}{\partial t} = a^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n(r, \varphi, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n(r, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} \right] + b n(r, \varphi, t), \quad (19)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\begin{aligned} n(r, \varphi, 0) &= f_0(r, \varphi) \equiv \\ &\equiv F_{U0}(pH, \Theta, r, \varphi) \end{aligned} \quad (20)$$

$0 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$

где “U” – символ, означающий тип бацилл *Unibacillus*; pH – переменная водородного показателя; Θ – температура бетона и граничному условию

$$\begin{aligned} n(r_2, \varphi, t) &= 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Модификация (16)-(18) модели (19)-(21) – это дифференциальное уравнение диффузии для новой неизвестной функции $\tilde{n}(r, \varphi, t)$ вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{n}(r, \varphi, t)}{\partial t} &= \\ &= a^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{n}(r, \varphi, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{n}(r, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

с начальным условием

$$\begin{aligned} \tilde{n}(r, \varphi, 0) &= f_0(r, \varphi) \equiv F_{U0}(pH, \Theta, r, \varphi) \\ 0 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (23)$$

и граничным условием

$$\begin{aligned} \tilde{n}(r_2, \varphi, t) &= 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Для решения дифференциального уравнения диффузии (22) применим метод Фу-

рье. С этой целью представим неизвестную функцию $\tilde{n}(r, \varphi, t)$ в факторизованном виде

$$\tilde{n}(r, \varphi, t) = \eta(r, \varphi) \xi(t), \quad (25)$$

где неизвестная функция $\eta = \eta(r, \varphi)$ зависит только от пространственных переменных (r, φ) , тождественно не равна нулю и принадлежит классу $C^2([0, r_2] \times [0, 2\pi])$, а неизвестная функция $\xi = \xi(t)$ зависит только от временного переменного t , тождественно не равна нулю и принадлежит классу $C^1([0, \infty))$. Подставляя выражение (25) в дифференциальное уравнение (22) и разделяя переменные (r, φ) и t , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta(r, \varphi)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \eta(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] &= \\ &= \frac{1}{a^2 \xi(t)} \frac{d\xi(t)}{dt} = -\lambda, \quad \lambda > 0. \end{aligned} \quad (26)$$

С учётом (26) легко получить для неизвестной функции $\xi = \xi(t)$ дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\xi(t)}{dt} + \lambda a^2 \xi(t) = 0, \quad (27)$$

а для неизвестной функции $\eta = \eta(r, \varphi)$ дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \\ + \lambda \eta(r, \varphi) = 0, \quad \lambda > 0, \end{aligned} \quad (28)$$

которая должна, на основании (24), (25), удовлетворять дополнительному условию

$$\eta(r_2, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (29)$$

а также условию ограниченности

$$|\eta(0, \varphi)| < \infty, \quad (30)$$

и условию периодичности по отношению к циклическому переменному φ

$$\eta(r, \varphi) = \eta(r, \varphi + 2\pi). \quad (31)$$

Задача (26)-(29) называется задачей Штурма-Лиувилля для функции $\eta = \eta(r, \varphi)$.

Следуя схеме метода Фурье, представим функцию $\eta(r, \varphi)$ в виде

$$\eta(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \quad (32)$$

После подстановки предполагаемой формы решения (30) в дифференциальное уравнение (26) и разделения переменных r и φ получим

$$\frac{1}{R(r)} r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \lambda r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \nu^2. \quad (33)$$

Анализ соотношения (31) приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

для функции $\Phi(\varphi)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \nu^2 \Phi(\varphi) &= 0, \\ \Phi(\varphi) &= \Phi(\varphi + 2\pi), \\ \frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi} &= \frac{d\Phi(\varphi + 2\pi)}{d\varphi} \end{aligned} \quad (34)$$

и для функции $R(r)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R(r) &= 0, \quad (35) \\ R(r_2) &= 0, \quad |R(0)| < \infty. \end{aligned}$$

Легко видеть, что периодическое решение дифференциального уравнения (34), которое тождественно не равно нулю, существует только при условии

$$\nu = n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (36)$$

и определяется формулой

$$\Phi_n(\varphi) = C_{1n} \cos n\varphi + C_{2n} \sin n\varphi, \quad (37)$$

где $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ есть две линейно независимые собственные функции, принадлежащие собственному значению $\nu^2 = n^2$.

Учитывая равенство (36) перепишем дифференциальное уравнение (35) в форме

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R(r) = 0, \quad (38)$$

$$R(r_2) = 0, \quad |R(+0)| < \infty.$$

Дифференциальное уравнение (38) может быть сведено к уравнению цилиндрических функций с помощью введения нового переменного

$$z = \sqrt{\lambda} r, \quad 0 \leq r \leq r_2 \quad (39)$$

и последующего определения

$$U(z) \equiv R\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right) = R(r). \quad (40)$$

Для функции $U(z)$ (40), на основании (38), получим искомое уравнение цилиндрических функций

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dU(z)}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) U(z) = 0 \quad (41)$$

с дополнительными условиями

$$U(z_2) = 0, \quad z_2 = \sqrt{\lambda} r_2, \quad |U(0)| < \infty. \quad (42)$$

Выпишем общее решение уравнения цилиндрических функций (41)

$$U(z) = A_1 J_n(z) + A_2 N_n(z), \quad (43)$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные; $J_n(z)$, $N_n(z)$ – соответственно функция Бесселя и функция Неймана n -го порядка.

Имея в виду, что асимптотическое поведение при $z \rightarrow +0$ функции Бесселя имеет вид $J_0(+0) = 1 \neq 0$, $J_n(z) \approx z^n$, $n > 0$, а функция Неймана стремится к бесконечности $N_0(z) \approx \ln \frac{1}{z}$, $N_n(z) \approx \frac{1}{z^n}$, $n > 0$, необходимо в равенстве (43) положить $A_2 = 0$.

Таким образом, частные решения уравнения цилиндрических функций (41) имеют вид

$$U(z) = J_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (44)$$

Используя формулу (44), а также первое из дополнительных условий (42), получаем

$$J_n(\sqrt{\lambda} r_2) = 0, \quad \lambda > 0. \quad (45)$$

Полагая в уравнении (45) $\mu \equiv \sqrt{\lambda} r_2$, будем иметь

$$J_n(\mu) = 0, \quad \mu = \mu_m^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (46)$$

где $\mu_m^{(n)}$ – m -ый корень равенства (46), $\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \dots$.

На основе (46) легко выписать явное выражение для собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля (38)

$$\lambda = \lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_2} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ m = 1, 2, 3, \dots, \quad (47) \\ \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \dots$$

Собственным числам (47) относятся собственные функции $R_{n,m}(r)$, как решение дифференциального уравнения (38), в виде

$$R_{n,m}(r) = U(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_2} r \right). \quad (48)$$

Легко показать, что функции (48) ортогональны с весом r , то есть

$$\int_0^{r_2} r J_n \left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_2} r \right) J_n \left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_2} r \right) dr = \\ = \delta_{m_1 m_2} \frac{r_2^2}{2} [J'_n(\mu_{m_1}^{(n)})]^2 \quad (49)$$

где $\delta_{m_1 m_2}$ – символ Кронекера. На основе (49) можно вычислить норму $\|R_{n,m}\|$ функции $R_{n,m}(r)$ (48)

$$\|R_{n,m}\|^2 = \frac{r_2^2}{2} [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2. \quad (50)$$

Для случая радиальной симметрии, когда $n = 0$, с помощью (50) получаем

$$\|R_{0,m}\|^2 = \frac{r_2^2}{2} [J_1(\mu_m^{(0)})]^2, \quad (51)$$

где $\mu_m^{(0)}$ – корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\mu) = 0, \quad \mu = \mu_m^{(0)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (52) \\ \mu_1^{(0)} < \mu_2^{(0)} < \dots$$

Приведём несколько значений для корней $\mu_m^{(0)}$ (52)

$$\mu_1^{(0)} = 2,4048, \quad \mu_2^{(0)} = 5,5201, \quad \mu_3^{(0)} = 8,6537. \quad (53)$$

Выпишем, учитывая равенства (32), (37), (48), собственные решения задачи (28), принадлежащих собственному значению (47)

$$\eta_{n,m}^{(1)}(r, \varphi) = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_2} r \right) \cos n\varphi, \quad (54) \\ \eta_{n,m}^{(2)}(r, \varphi) = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_2} r \right) \sin n\varphi.$$

Таким образом, частное решение задачи (28) будет иметь вид линейной комбинации собственных решений (54), то есть

$$\eta_{n,m}(r, \varphi) = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_2} r \right) \cdot (C_{n,m} \cos n\varphi + D_{n,m} \sin n\varphi) \quad (55)$$

Заметим, что собственные функции (54) ортогональны с весом r и имеют одинаковую норму

$$\|\eta_{n,m}^{(1)}\| = \|\eta_{n,m}^{(2)}\| = \begin{cases} \pi \frac{r_2^2}{2} [J'_0(\mu_m^{(0)})]^2, & n = 0, \\ \pi \frac{r_2^2}{2} [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2, & n \neq 0. \end{cases} \quad (56)$$

Далее, решение линейного дифференциального уравнения первого порядка (27), соответствующее собственному значению (47), имеет вид

$$\xi_{n,m}(t) = \exp(-\lambda_{n,m} a^2 t). \quad (57)$$

Структура частного решения модифицированного дифференциального уравнения диффузии (22), с учётом (25), (47), (55), (57), даётся равенством

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{n,m}(r, \varphi, t) = \\ = \exp \left[-a^2 \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_2} \right)^2 t \right] J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_2} r \right) \times \\ \times (C_{n,m} \cos n\varphi + D_{n,m} \sin n\varphi) \end{aligned} \quad (58)$$

Решение дифференциального уравнения диффузии (22) будем находить в форме, которая характерна общему принципу суперпозиции

$$\begin{aligned} \tilde{n}(r, \varphi, t) = \sum_{n,m} \tilde{n}_{n,m}(r, \varphi, t) = \\ = \sum_{n,m} \exp \left[-a^2 \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_2} \right)^2 t \right] \times \\ \times (C_{n,m} \eta_{n,m}^{(1)}(r, \varphi) + D_{n,m} \eta_{n,m}^{(2)}(r, \varphi)). \end{aligned} \quad (59)$$

Используя начальное условие (23), найдем явное выражение для коэффициентов $C_{n,m}$, $D_{n,m}$ в формуле (59).

Таким образом

$$\begin{aligned} \tilde{n}(r, \varphi, 0) = f_0(r, \varphi) = \\ = \sum_{n,m} (C_{n,m} \eta_{n,m}^{(1)}(r, \varphi) + \\ + D_{n,m} \eta_{n,m}^{(2)}(r, \varphi)), \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned} C_{n,m} = C_{n,m}(pH, \Theta) = \\ = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} F_{U0}(pH, \Theta, r, \varphi) J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \cos n\varphi dr d\varphi}{\frac{\pi r_2^2}{2} \varepsilon_n [J'_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r_2)]^2}, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} D_{n,m} = D_{n,m}(pH, \Theta) = \\ = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} F_{U0}(pH, \Theta, r, \varphi) J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \sin n\varphi dr d\varphi}{\frac{\pi r_2^2}{2} \varepsilon_n [J'_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r_2)]^2}. \end{aligned} \quad (62)$$

В формулах (61), (62) величина

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n \neq 0. \end{cases}$$

С помощью равенств (9), (15), (54), (58), (61), (62), окончательно выпишем решение вспомогательного задания (а) (19)

$$\begin{aligned} n(r, \varphi, t) = \sum_{n,m} \exp \left[\left(\frac{\gamma}{c} - \frac{D}{c} \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r} \right)^2 \right) t \right] J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_2} r \right) \cdot \\ \cdot (C_{n,m} \cos n\varphi + D_{n,m} \sin n\varphi) \end{aligned} \quad (63)$$

Заметим, что вспомогательное задание (а) (19)-(21) допускает возможность упрощения, связанного с предположением о радиальной симметрии процесса диффузии бацилл *Unibacillus*, когда неизвестная функция $n(r, \varphi, t)$ не зависит от переменного φ , т.е. $n(r, \varphi, t) \equiv n(r, t)$. Формализация этого предположения обеспечивается значением $n = 0$ в формуле (63)

$$n(r, t) = \sum_m C_{0,m} \exp \left[\left(\frac{\gamma}{c} - \frac{D}{c} \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_2} \right)^2 \right) t \right] J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_2} r \right), \quad (64)$$

где $C_{0,m}$ – коэффициенты даются равенством на основе (61),

$$C_{0,m} = C_{0,m}(pH, \Theta) = \frac{\int_0^{r_2} F_{U0}(pH, \Theta, r) J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_2} r \right) r dr}{\frac{r_2^2}{2} [J_1(\mu_m^{(0)})]^2}, \quad (65)$$

где c – коэффициент пористости бетона; D – коэффициент диффузии бацилл; γ – коэффициент размножения бацилл.

Найдём решение дифференциального уравнения (6) для концентрации серной кислоты (5) $n_{s.a.} = n_{s.a.}(r, t)$ в плоском радиально симметричном случае, используя соотношение (64)

$$\begin{aligned} n_{s.a.}(r, t) = \sum_m \frac{C_{0,m}(pH, \Theta)}{\frac{\gamma}{c} - \frac{D}{c} \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_2} \right)^2} \times \\ \times \left(\exp \left[\left(\frac{\gamma}{c} - \frac{D}{c} \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_2} \right)^2 \right) t \right] - 1 \right) J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_2} r \right). \end{aligned} \quad (66)$$

Анализ закона (64), с учётом формулы (52), приводит к выводу, что при выполнении неравенства

$$\frac{\gamma}{c} - \frac{D}{c} \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_2} \right)^2 > 0 \quad (67)$$

процесс размножения бацилл *Unibacillus* носит характер *цепной реакции* с асимптотическим поведением вида

$$n(r, t) \approx C_{0,1}(pH, \Theta) \exp \left[\left(\frac{\gamma}{c} - \frac{D}{c} \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_2} \right)^2 \right) t \right] J_0 \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_2} r \right), \quad (68)$$

$t \rightarrow +\infty$

где c – коэффициент пористости бетона определяется равенством (22) в [14]

$$c \equiv \Delta v_{cap} = \pi r^2(T) \bar{n}_e(T) n_{1a} \sqrt{n_{1a}} \left[\frac{1}{n_{1a}^{3/2}} - \frac{4}{3} \pi r_{col}^3(T) \right], \quad (68')$$

а величины $r_{col}(T)$, $\bar{n}_e(T)$ определяются соответственно формулами (2.20), (2.31).

Критическое значение внешнего радиуса r_{2cr} бесконечной цилиндрической трубы T_u , начиная с которого процесс размножения бацилл определяется законом (68), удовлетворяет равенству

$$\frac{\gamma}{c} - \frac{D}{c} \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_{2cr}} \right)^2 = 0. \quad (69)$$

Таким образом, на основе (69), получаем

$$r_{2cr} = \mu_1^{(0)} \sqrt{\frac{D}{\gamma}}. \quad (70)$$

Когда внешний радиус r_2 бесконечной цилиндрической трубы T_u такой, что

$$r_2 < r_{2cr} = \mu_1^{(0)} \sqrt{\frac{D}{\gamma}}, \quad (71)$$

то в теле бетона происходит процесс гибели начальной популяции бацилл *Unibacillus*, который тоже исследуется на уровне формулы (68).

Таким образом, учитывая фундаментальную роль параметра r_{2cr} (70), можно

утверждать, что теоретическое и прикладное значение формулы (68) имеет в достаточно малой окрестности точки $r_2 = r_{2cr}$, $r_2 \in (r_{2cr} - \Delta, r_{2cr} + \Delta) \setminus \{0\}$.

Имея в виду прикладные аспекты данной модели, приведём количественную оценку функции концентрации серной кислоты (66) на промежутке $r_2 \in (r_{2cr} - \Delta, r_{2cr} + \Delta) \setminus \{0\}$. Легко видеть, что при $r_2 \rightarrow r_{2cr} \pm 0$ поведение функции $n_{s.a.}(r, t)$ определяется первым членом ряда (66)

$$n_{s.a.}(r, t) \approx \mathcal{G}(pH, \Theta) \frac{C_{0,1}(pH, \Theta)}{\frac{\gamma}{c} - \frac{D}{c} \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_2} \right)^2} \times \left(\exp \left[\left(\frac{\gamma}{c} - \frac{D}{c} \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_2} \right)^2 \right) t \right] - 1 \right) J_0 \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_2} r \right), \quad (72)$$

$r_2 \rightarrow r_{2cr} \pm 0$.

Если в (72) параметр принимает значение

$$t = t(r_2) \equiv \frac{1}{\left| \frac{\gamma}{c} - \frac{D}{c} \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_2} \right)^2 \right|}, \quad (73)$$

то количественная оценка функции концентрации серной кислоты $n_{s.a.}[r, t(r_2)]$ (72) даётся соотношением

$$n_{s.a.}[r, t(r_2)] \approx \mathcal{G}(pH, \Theta) \frac{C_{0,1}(pH, \Theta)}{\frac{\gamma}{c} - \frac{D}{c} \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_2} \right)^2} \times (\exp(\pm 1) - 1) J_0 \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_2} r \right) \rightarrow +\infty, \quad (74)$$

$r_2 \rightarrow r_{2cr} \pm 0$,

то есть, функция неограниченно возрастает, что способствует медлительной биодеструкции бетона в течение периода времени $[0, t(r_2)]$.

Если в формуле (72) параметр t приобретает произвольное фиксированное зна-

чение, то асимптотическое поведение функции $n_{s.a.}(r, t)$ имеет вид

$$n_{s.a.}(r, t) \approx \vartheta(pH, \Theta) C_{0,1}(pH, \Theta) t J_0 \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_2} r \right), \quad (75)$$

$$r_2 \rightarrow r_{2cr}.$$

Формула (75) является базовой для изучения скорости разрушения бетонных конструкций в канализационных системах – она позволяет исследовать иерархию момента времени $t^{(k)}$, $k=1,2,3$, которые характеризуют соответствующие степени разрушения единицы объёма бетонной трубы Т с помощью равенства (8). С этой целью найдём среднее значение $\langle n_{s.a.} \rangle$

функции $n_{s.a.}(r, t)$

$$\frac{\vartheta(pH, \Theta) \int_0^t dt \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi C_{0,1}(pH, \Theta) t J_0 \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_2} r \right)}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \xrightarrow{r_1 \rightarrow +0, r_2 \rightarrow r_{2cr}} \frac{\vartheta(pH, \Theta) C_{0,1}(pH, \Theta) \Gamma(r_{2cr})}{r_{2cr}^2} t = \langle n_{s.a.} \rangle, \quad (76)$$

где величины $C_{0,1}(pH, \Theta)$, $\Gamma(r_{2cr})$ определяются равенствами

$$C_{0,1} = C_{0,1}(pH, \Theta) = \frac{\int_0^{r_{2cr}} F_{U0}(pH, \Theta, r) J_0 \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_{2cr}} r \right) r dr}{\frac{r_{2cr}^2}{2} [J_1(\mu_1^{(0)})]^2}, \quad (77)$$

$$\Gamma(r_{2cr}) = \int_0^{r_{2cr}} r J_0 \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_{2cr}} r \right) dr. \quad (78)$$

На основании формул (8), (76), легко найти явное выражение для моментов времени $t^{(k)}$, $k=1, 2, 3$

$$t^{(k)} = t^{(k)}(pH, \Theta) = \frac{r_{2cr}^2}{\vartheta(pH, \Theta) C_{0,1}(pH, \Theta) \Gamma(r_{2cr})} n^{(k)}, \quad k=1,2,3. \quad (79)$$

Выпишем, с помощью (79), количественное значение временного параметра *полного* разрушения бетона $t_{des} \equiv t^{(3)}$

$$t_{des} = t_{des}(pH, \Theta) = \frac{r_{2cr}^2}{\vartheta(pH, \Theta) C_{0,1}(pH, \Theta) \Gamma(r_{2cr})} n^{(3)}. \quad (80)$$

Выводы. В работе на модельном уровне проведено последовательное исследование процесса биокоррозии бетонных труб канализационных систем, начиная с момента заселения тела бетона *унифицированной* популяцией бацилл *Unibacillus*, которые имеют общие свойства микроорганизмов-биодеструкторов, и заканчивая описанием полного разрушения бетона. При этом основное внимание было акцентировано на пространственно-временных факторах процесса биодеструкции, которые определяют качественно различные этапы размножения бацилл в достаточно малой окрестности критической величины внешнего радиуса бетонной цилиндрической трубы T_{II} : $r_2 = r_{2cr}$, $r_2 \in (r_{2cr} - \Delta, r_{2cr} + \Delta) \setminus \{0\}$, то есть, у поверхностного слоя толщиной 2Δ , что исключало влияние внутренней поверхности трубы: в данной модели это требование было реализовано с использованием граничного перехода для внутреннего радиуса трубы $r_1 \rightarrow +0$. Существование параметра Δ делает возможным применение технологии флюатирувания на промежутке $r_2 \in (r_{2cr} - \Delta, r_{2cr} + \Delta) \setminus \{0\}$ и задаёт границу использования арматурного каркаса вне среды жизнедеятельности железо разрушающих тиобацилл.

Библиографический список

1. Jensen H.S. et al. Growth kinetics of hydrogen sulfide oxidizing bacteria in corroded concrete from sewers / H.S. Jensen et al. // J. Hazardous Materials. — 2011. — № 198. — P. 685–691.
2. Zhang L. et al. Chemical and biological technologies for hydrogen sulphide emission control in sewer systems / L. Zhang et al. // A review. Water Research. — 2008. — № 42. — P. 1–12.
3. Islander R. et al. Microbial Ecology of Crown Corrosion in Sewers / R. Islander et al. // J. Environ. Eng. — 1991. — № 117. — P. 751–770.

4. Nica D. et al. Isolation and characterization of microorganisms involved in the biodeterioration of concrete in sewers / D. Nica et al. // *International Biodeterioration & Biodegradation*. — 2000. — № 46. — P. 61–68.

5. Hernandez M. et al. In situ assessment of active *Thiobacillus* species in corroding concrete sewers using fluorescent RNA probes / M. Hernandez et al. // *International Biodeterioration & Biodegradation*. — 2002. — № 49. — P. 271–276.

6. Vollertsen J. et al. Corrosion of concrete sewers – the kinetics of hydrogen sulfide oxidation / J. Vollertsen et al. // *Science of the Total Environment*. — 2008. — № 39. — P. 162–170.

7. Дрозд Г. Я. Повышение биологической стойкости канализационных бетонных труб физико-химическим методом / Г. Я. Дрозд, М. Ю. Хвортова // *Вода и экология. Проблемы и решения*. — 2014. — № 3(59). — С. 63–70.

8. Дрозд Г. Я. Коррозия бетонных канализационных труб / Г. Я. Дрозд, М. Ю. Хвортова // *Научно-практический журнал «Агротехника и энергообеспечение»*. — 2015. — № 2 (6). — С. 76.

Рекомендована к печати д.т.н., проф. Института архитектуры, строительства и ЖКХ ЛГУ им. Даля Андрійчуком Н.Д., к.т.н., доц. ДонГТУ Бондарчуком В.В.

Статья поступила в редакцию 09.11.15.

к.т.н. Хвортова М. Ю., д.т.н. Дрозд Г. Я., к.т.н. Буряк В. Г. (ІБАіЖКГ ЛДУ ім. В. Даля, м. Луганськ, ЛНР), д.т.н. Братчун В. І. (ДонНАБА, м. Макіївка, ДНР)

ЕФЕКТИВНИЙ СПОСІБ ЗАХИСТУ ВІД БІОХІМІЧНОЇ КОРОЗІЇ БЕТОННИХ ТРУБ КАНАЛІЗАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Виконано дослідження впливу загальних чинників на формування і розвиток нестационарного процесу біокорозії бетонних виробів, експлуатація яких відбувається в умовах розмноження мікроорганізмів-біодеструкторів на тлі пористої структури бетону за схемою ланцюгової реакції в межах аеробної - рідинного поживного середовища з опосередкованим обліком змінного водневого показника рН. Дана кількісна оцінка величини граничного діаметру бетонної труби, яка визначає, залежно від біохімічних, біофізичних і технологічних параметрів процесу біодеструкції, початок ланцюгової мікробіологічної реакції. Отримані результати дозволяють безпосередньо впливати на технологію виробництва засобів захисту бетонних труб з мінімально раціональною товщиною стінки за наявності арматурного каркаса (зокрема, застосування технології флюатування).

Ключові слова: біокорозія, бетон, каналізаційний колектор, біодеструкція, флюатування.

PhD in Engineering Khvortova M.Y., Dr. Tech. Sci. Drozd G.Ya., PhD in Engineering Buryak V.G. (ISAandZhKKh LGU im.V.Dalia, Lugansk, LPR), Dr.Tech.Sci. Bratchun V.I. (DonNABA, Makeievka, DNR)

AN EFFICIENT PROTECTIVE METHOD FROM BIOCHEMICAL CORROSION OF CONCRETE PIPES IN SEWAGE SYSTEM

Studying the common influential factors on formation and nonstationary biocorrosion process of concrete products was made, which operation is under conditions of reproduction of microorganisms-biodestructures within honeycomb concrete by chain-type reaction in anaerobic liquid nutrient environment with mediated account of pH factor. The quantitative assessment of extremal diameter size of concrete pipe, which determines the beginning of microbiological chain reaction depending on biochemical, biophysical and technological parameters in biodestruction process. Obtained results provide direct impact onto production technology of protective means for concrete pipes with minimum reasonable wall thickness if the reinforcement cage is included (in particular, using the silicofluoride treatment).

Key words: biocorrosion, concrete, sewage header, biodestruction, silicofluoride treatment.