

УДК 622.243.2:622.831.2.02

*д.т.н., проф. Литвинский Г. Г.
(ДонГТУ, г. Алчевск, ЛНР, ligag@ya.ru)*

ФРАГМЕНТАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕЛЕ С МИКРОДЕФЕКТАМИ

Стремление повысить достоверность описания поведения материалов при термомеханических воздействиях требует перехода к все более сложным математическим моделям. В данной работе представлена новая модель напряженно-деформированного состояния (НДС) твердого тела с микродефектами при произвольном его нагружении. На основе качественного анализа закономерностей распределения микродефектов сдвигового и разрывного типа оценены аномалии напряжений в их окрестности. Выбраны и обоснованы параметры математической модели НДС, основные предпосылки и ограничения. Рассмотрено и оценено влияние прочностных показателей на микросдвиги и разрывы. Доказана фрагментация напряжений по всему объему тела, вызванная микродефектами. Впервые получена система уравнений НДС, показаны микромеханизмы формирования петель гистерезиса при знакопеременном нагружении тела, оценено различие напряжений на упругих и дефектных площадках тела.

Ключевые слова: микросдвиг, микроразрыв, теория НДС, математическая модель, упругие и дефектные области, фрагментация напряжений, параметры прочности, петли гистерезиса.

1 Актуальность и цель исследований

Многочисленные исследования, которые проводятся в настоящее время, направлены на изучение особенностей поведения материалов со сложной (гетерогенной) структурой под влиянием разнообразных температурно-механических воздействий и привлекают внимание многих ученых в области твердого деформируемого тела и материалов естественного и искусственного генезиса [1–6 и др.]. Делать подробный анализ ранее выполненных исследований по данной проблематике нет необходимости ввиду уже существующих достаточно обстоятельных обзоров и оценок [7–9 и др.]. До сих пор остается справедливым утверждение [3], что теория механического поведения материалов еще далека от своего завершения. Очевидно, приходится иметь дело с явлениями на самых различных уровнях; там, где нет точных решений, приходится пользоваться приближенными моделями, а там, где нет моделей или они сложны, придется обращаться к экспериментальным данным и эмпирическим описаниям.

Одной из главных задач этой сложной проблемы по праву можно считать уста-

новление всей картины напряженно-деформированного состояния (НДС) в сложно-структурированном материале с микро- и мезодефектами, возникшими в результате термофлуктуационных процессов под действием внешних температурно-силовых воздействий.

Задача изучения НДС микродефектного тела должна базироваться на четком и непротиворечивом описании всего разнообразия микродефектов (поврежденностей) с учетом их расположения и взаимодействия друг с другом. Попытки аналитического решения такой краевой задачи в прямой постановке с использованием математической теории упругости, пластичности и ползучести ввиду чрезвычайной сложности можно заранее считать обреченными на неудачу.

Поэтому на пути решения этой проблемы неизбежно возникает необходимость принятия некоторого числа аксиом и упрощающих предпосылок. Последние должны тем не менее опираться на ранее проведенные наблюдения, экспериментальные данные и ранее установленные теоретические соотношения. К числу таких исходных предпосылок, положенных нами в основу изучения НДС микродефектного тела, следует отнести:

– в теле представлены микродефекты в виде микросдвигов, микроразрывов и их ансамблей [10];

– микродефекты в твердом теле расположены стохастически равномерно, при этом тело в целом квазиизотропно;

– задана фиксированная на данный промежуток времени исходная структура микродефектов в виде матрицы W_{ij} [6], т. е. рассматривается квазистатическая задача;

– главный вектор и главный момент от внешней нагрузки равны нулю, т. е. рассматривается статическое равновесие.

Эти и принятые далее условия являются достаточно гибкими и не приводят к существенному ограничению общности решаемой задачи.

Цель исследования — разработка теории НДС микродефектного тела при произвольном внешнем его нагружении.

Идея работы состоит в использовании ранее предложенной математической модели микродефектного тела, в котором существует структура из поврежденностей сдвигового и разрывного типов.

Объектом исследований являются структура микродефектов в виде сдвигов и разрывов и ее влияние на НДС, **предмет** исследований — закономерности НДС в теле с микродефектами.

К основным **задачам** исследования следует отнести:

– оценку местных (локальных) возмущений НДС, возникающих в окрестности разрывных и сдвиговых микродефектов;

– выбор и обоснование параметров математической модели НДС, основных предпосылок и ограничений;

– разработку и обоснование метода определения НДС на сдвиговых и разрывных областях твердого тела;

– исследование закономерности НДС микродефектного тела.

Выполненные исследования являются продолжением и существенным образом опираются на результаты работы [10], где представлена новая теория микро- и мезодефектов в твердом теле.

2 Элементарные микродефекты при определении НДС

Под воздействием внешних сил, приложенных к телу с макро-, мезо- и микродефектами, возникает напряженное состояние, определение которого представляет собой весьма сложную задачу механики твердого деформированного тела.

Априори можно утверждать, что следует различать макро- и микроуровни напряженного состояния материала. Под макронапряженным состоянием понимают такое распределение напряжений и деформаций, которое игнорирует неоднородности путем как бы размазывания влияния микродефектов в теле, т. е. допускают осреднение их влияния по всему объему. Это позволяет рассматривать тело как квазиоднородное, пренебрегая наличием мезо- и микроповрежденностей.

В противовес этому микро- и мезонапряженное состояние тела предполагает более детальное описание распределения напряжений с учетом влияния микродефектов. При этом при переходе к макромасштабу эти микронапряжения, после осреднения по объему, должны в пределе быть равными макронапряжениям. Разумеется, решение такой задачи о НДС материала с учетом неоднородностей и поврежденностей заметно усложняется и может быть выполнено с разной степенью детализации.

Рассмотрим элементарный объем микродефектного тела, в котором существуют оба типа дефектов, — микроразрывов и микросдвигов [10], определенным образом ориентированных приложенной нагрузкой, в виде Z -ансамблей, стохастически равномерно распределенных по всему объему материала.

Стремление описать НДС вокруг трещин «в лоб» с учетом всех его особенностей, в том числе и в краевых областях дефектов, где расположены сингулярности, как это делается, например, в механике разрушения [3, 6 и др.], в данном случае малопродуктивно и заранее обречено на неудачу.

Все многообразие поврежденностей, которые возникают в материале, можно в

конечном итоге представить той или иной комбинацией элементарных разрывных и сдвиговых деформаций.

Как известно, в теле возможны три типа элементарных нарушения сплошности (краевых деформаций): *I* — нормальный отрыв; *II* — продольный и *III* — поперечный сдвиги (рис. 1).

Такого типа элементарные микродефекты оказываются достаточными, чтобы по отдельности или в совокупности в разных сочетаниях описать любое структурное изменение твердого тела. Однако при попытках точного аналитического определения НДС в окрестности таких дефектов возникают значительные математические осложнения (например, сингулярности и пр.), которые многократно увеличиваются, когда такие микродефекты взаимодействуют друг с другом.

3 Ансамбли микродефектов при определении НДС

Среди многочисленных исследований в области механики разрушения внимание почти всех авторов было сосредоточено на изучении напряженно-деформированного состояния материала в окрестности трещин *I* типа — нормального разрыва. На рисунке 2 показана качественная картина распределения концентрации касательных напряжений вокруг кончика такого типа трещин. Несмотря на сравнительную простоту исходного объекта исследования — трещины разрыва, в краевой части которой одинаковый тип деформаций (*I* — нормальный отрыв), — распределение напряжений отличается чрезвычайной сложностью.

Особое внимание следует обратить на высокую концентрацию напряжений (сингулярность) возле кончика трещин. Это создает возможность дальнейшего роста трещины по двум механизмам: либо путем продолжения нормального отрыва *I*, приводящего к удлинению трещины, либо в виде появления в кончике трещины сдвигов под углом, близким к 45° (рис. 3), что превращает трещину в *Z*-ансамбль дефектов [10].

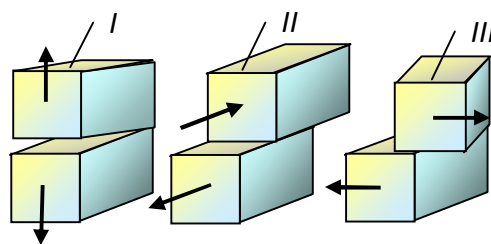


Рисунок 1 Элементарные микродефекты с разрывом сплошности: *I* — нормальный отрыв, *II* — продольный сдвиг, *III* — поперечный сдвиг

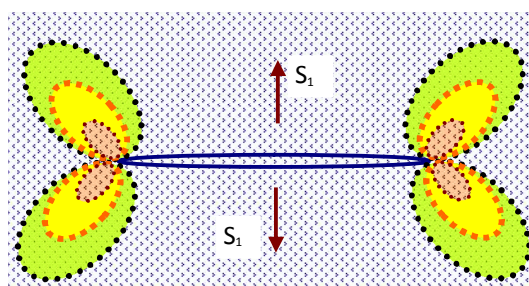


Рисунок 2 Качественная картина напряженно-деформированного состояния в окрестности элементарного разрыва

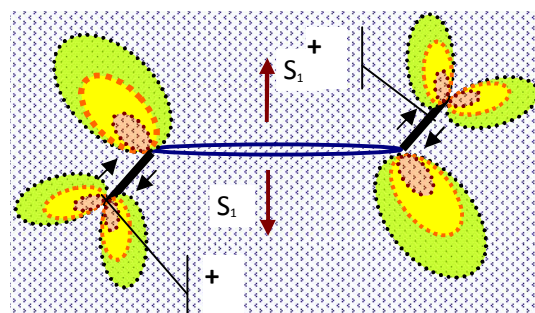


Рисунок 3 Схема распределения напряжений вокруг ансамбля дефектов «разрыв + сдвиги» при растяжении

В окрестности *Z*-ансамбля дефектов присутствуют все три возможных типа деформации. Надо отметить, что коэффициенты интенсивности напряжений для каждого типа деформаций изучены в рамках линейной механики разрушения [6] и трактуются как функции приложенных нагрузок, геометрии тела и трещины.

Однако для микронеоднородного тела [8] с целью определения трещиностойкости

конструкции (т. е. сопротивления конструкции распространению трещин) оказалось необходимым производить свертку этих коэффициентов, добиваясь получения обобщенных критериальных соотношений, которые неоднократно предлагались многими исследователями.

В работе [6] таких критериев разрушения приведено более двадцати, что свидетельствует об отсутствии единой трактовки разрушения и далеко от завершения методическом подходе к решению этой сложной проблемы.

Из области изучения проблем и решения задач механики разрушения выпали многие вопросы образования и развития произвольно ориентированных дефектов сдвигового характера и ансамблей дефектов *Z*-типа и тем более задачи определения напряжений в их окрестности (рис. 4).

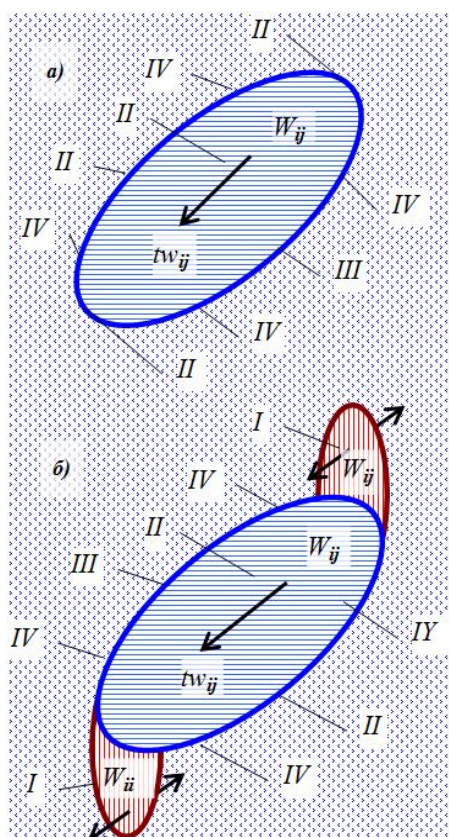


Рисунок 4 Распределение элементарных деформаций в окрестности объемного микросдвига (а) и комплексной поврежденности типа *Z*-ансамбля (б)

Как видно из рисунка 4, а, только на отдельных участках контура микросдвига *Z*-дефекта [10] можно идентифицировать один из типов элементарных краевых деформаций *I*, *II*, *III*. В остальных случаях краевая часть такого микродефекта подвержена сложному сочетанию *IV* элементарных деформаций *II*, *III* типа.

Z-ансамбли микродефектов образованы сразу тремя видами элементарных деформаций *I*, *II*, *III* и *IV*. Попытки введения сложных искусственных критериальных соотношений для определения трещиностойкости материалов не спасают положение, поскольку эти критерии дают прогноз устойчивости только в локальной области (по сути — в точке). Это же относится к обычным наклонным трещинам сдвига [6], где также требуется совместное рассмотрение условий равновесия трещин.

На самом деле, как нам представляется, процесс роста трещины происходит в несколько этапов. Исходной (первоначальной) трещиной, как правило, становятся:

- для материалов, в которых проявляются пластические свойства (например, металлы), — преобладающие начальные микросдвиги *II* вдоль направления максимальных касательных напряжений;
- для хрупких материалов (типа горных пород) первичными при росте внешней нагрузки являются микроразрывы *I* в виде пинч-эффекта в направлении деформаций растяжения, перпендикулярных минимальной компоненте напряжений.

По мере повышения напряженного состояния микросдвиги *II* растут, и их число в объеме тела увеличивается, концентрация растягивающих напряжений вблизи его концов приводит к появлению трещин отрыва *I*. Тем самым сдвиг преобразуется в *Z*-дефект (рис. 4, б), в котором центральное место занимает сдвиг *II*, а его «оперяют» две трещины отрыва *I*, направленные вдоль максимального нормального напряжения (считая, как в геомеханике, сжатие положительным, а растяжение — отрицательным). Схематически общий вид

Z-дефекта с качественной картиной распределения касательных напряжений представлен на рисунке 4.

4 Главные Wt_{ij} и встречные Wf_{ji} микросдвиги и микронапряжения

Ввиду термофлуктуационной природы возникновения микродефектов, необходимо учитывать, что на одной и той же диагональной площадке между ортами ij с максимальными касательными напряжениями τ_{ij} могут возникать 2 типа микросдвигов, имеющих взаимно противоположную ориентацию (направления общего сдвига):

Wt_{ij} — основной сдвиг (*true*), направленный вдоль действующего максимального касательного напряжения τ_{ij} ;

Wf_{ji} — обратный сдвиг (*false*), направленный против максимального касательного напряжения τ_{ij} .

Они по определению удовлетворяют тождеству

$$\Sigma W = Wt_{ij} + Wf_{ji} = Wt_{ij} - Wf_{ij}. \quad (1)$$

Соответственно, на встречных микросдвигах Wt_{ij} и Wf_{ji} будут действовать главные $\tau_{wt_{ij}}$ и обратные $\tau_{wf_{ji}}$ касательные микронапряжения противоположных знаков. По определению должно выполняться равенство

$$\Sigma(W \cdot \tau w) = Wt_{ij} \cdot \tau_{wt_{ij}} + Wf_{ji} \cdot \tau_{wf_{ji}}. \quad (2)$$

Отсюда можно найти результирующее сдвиговое микронапряжение $\tau_{w_{ij}}$ на сдвиговых участках тела (*W-area*):

$$\Sigma \tau w = (Wt \cdot \tau_{wt} + Wf \cdot \tau_{wf}) / \Sigma W. \quad (3)$$

Введение сдвиговых поврежденностей типов “*true*” и “*false*” обусловлено термофлуктуационной природой их возникновения и необходимостью в дальнейшем описывать состояние материала при знакопеременных нагрузках. Если действующие на тело внешние нагрузки знакопостоянны во

времени, то, ввиду чрезвычайной малости обратных сдвигов $Wf_{ij} \approx 0$, ими можно пренебречь, что заметно упрощает решение задач реономной микромеханики.

Поскольку поврежденности Wt и Wf известны из решения кинетических уравнений реономной микромеханики [11], можно найти макронапряжение tw по формуле (3). Разумеется, при «простых» путях изменения механических нагрузок тела в расчетах можно использовать только главные сдвиги, что заметно упростит математическую модель определения НДС.

5 Математическая модель расчета НДС микродефектного тела

Основываясь на предыдущих замечаниях, при построении математической модели используем обобщенный подход, позволяющий произвести описание всей совокупности микродефектов в материале на основе анализа макро- и микрораспределения напряжений. Однако точного определения особенностей распределения напряжений вокруг каждого из дефектов с полной детализацией производить не будем, а ограничимся определением усредненных напряжений на дефектных и упругих площадках. Следовательно, считаем микродефектное тело квазиоднородным с равномерным распределением по всему объему всех типов микродефектов.

Рассмотрим в материале характерный объем в виде куба единичных размеров, грани которого ориентированы по главным площадкам с ортами i, j, k . В общем случае на тело действуют макронапряжения σ_i ($i = 1, 2, 3$).

Материал в исходном состоянии считаем квазиоднородным и изотропным, а распределение напряжений будем определять для совокупности дефектов сдвига и разрыва, геометрия которых представлена в [10].

В рамках обычных решений теории упругости напряженное состояние тела в точке будет задано тремя напряжениями σ_i , действующими на главных площадках. Од-

нако в микродефектном теле уже нельзя говорить о напряжении в точке, поскольку необходимо рассматривать некоторый представительный объем материала, содержащий в среднем все типы микродефектов, и выполняющий роль точки в континуальной теории деформаций и напряжений.

Согласно известным соотношениям теории упругости, максимальные касательные напряжения τ_{ij} на площадках, наклоненных к главным под 45 градусов, будут равны

$$\tau_{ij} = (\sigma_i - \sigma_j) / 2. \quad (4)$$

В упругой области, которую будем иначе называть сплошностью T_{ij} , или U -area, и которая является дополнением к дефектной области W_{ij} (W -area) согласно соотношению

$$T_{ij} = 1 - W_{ij}, \quad (5)$$

действуют упругие касательные напряжения τu_{ij} . Здесь T_{ij} , W_{ij} — сплошность и поврежденность на диагональной площадке между главными площадками i и j .

Определим базовое соотношение между упругими τu_{ij} и сдвиговыми τw_{ij} касательными напряжениями на упругих T_{ij} и сдвиговых W_{ij} площадках. Исходя из условий равновесия, должно соблюдаться равенство

$$\tau_{ij} = \tau u_{ij} \cdot T_{ij} + \tau w_{ij} \cdot W_{ij}, \quad (i \neq j), \quad (6)$$

где τ_{ij} — среднеинтегральное значение напряжений сдвига, Па.

Исходя из условий прочности Pw_{ij} на сдвиговых участках, в качестве основного уравнения для определения сдвиговых напряжений на микросдвигах при прямом нагружении принимаем следующие условия:

$$\text{if } |\tau_{ij}| \leq Pw_{ij} \text{ then } \begin{vmatrix} \tau w_{ij} \\ \sigma w_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_{ij} \\ \sigma_i \end{vmatrix} \text{ else } \begin{vmatrix} Pw \\ 2Pw \cdot Wc_i \end{vmatrix} \quad (7)$$

При разгрузке материала происходит пропорциональное упругое снижение напряжений на всех площадках вплоть до момента, пока на сдвиговых площадках не наступит отрицательное значение сдвиговой прочности $\tau_{ij} \leq -Pw_{ij} \rightarrow \tau w_{ij} = -Pw_{ij}$.

После этого дальнейшая разгрузка происходит при фиксированном предельном значении касательных напряжений на сдвиговых площадках вплоть до момента очередной смены внешней нагрузки.

Тогда из условий равновесия сил на всей рассматриваемой площадке находим напряжения на упругой ее части (U -area) по формулам

$$\begin{aligned} \tau u_{ij} \cdot T_{ij} &= \tau_{ij} - \tau w_{ij} \cdot W_{ij}, \\ \sigma u_i \cdot Tc_i &= \sigma_i - \sigma w_i \cdot Wc_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, касательные напряжения τw_{ij} и τu_{ij} на участках W -area и U -area каждой диагональной площадки с индексом ij ($i, j = 1, 2, 3$) определены.

Для завершения задачи о напряженном состоянии материала с дефектами необходимо найти значения всех нормальных напряжений на упругих и сдвиговых участках каждой из площадок i, j, k ($i, j, k = 1, 2, 3$) по заданным внешним нагрузкам в виде нормальных σ_i и касательных τ_{ij} макронапряжений, а также с учетом вычисленных по формулам (7–8) микронапряжений τu_{ij} и τw_{ij} .

С этой целью используем прием разложения тензора напряжений на шаровую и девиаторную составляющие (рис. 5, 6).

При этом будем считать, что на существующее макрополе главных напряжений накладывается дополнительное поле, обусловленное отклонением касательных напряжений на упругих τu и сдвиговых τw площадках от макронапряжений τ . Эти приращения для каждой площадки ij ($i, j = 1, 2, 3$) находим по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta \tau u_{ij} &= \tau u_{ij} - \tau_{ij}, \\ \Delta \tau w_{ij} &= \tau w_{ij} - \tau_{ij}. \end{aligned} \quad (9)$$

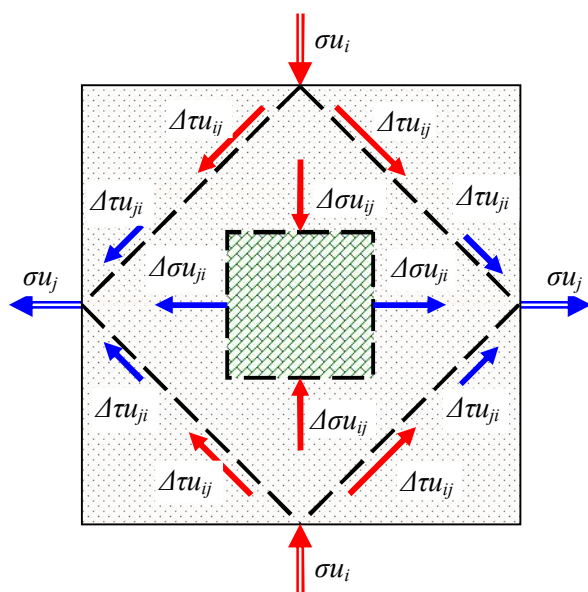


Рисунок 5 К определению нормальных микронапряжений на упругих участках материала

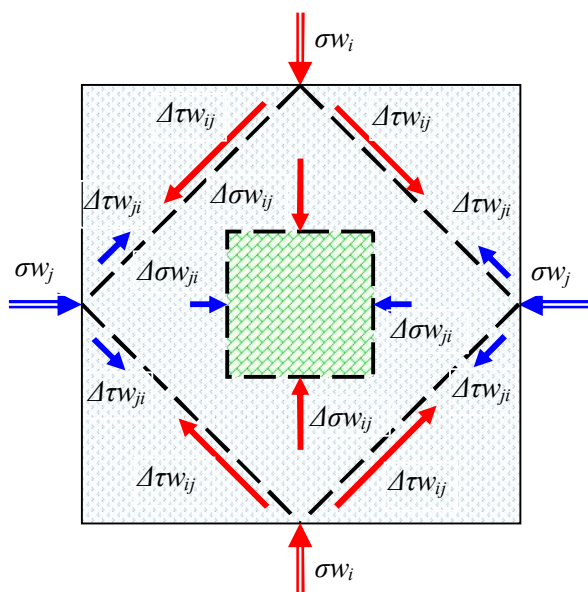


Рисунок 6 К определению нормальных микронапряжений на сдвиговых участках материала

Приращения напряжений будут создавать в материале состояние чистого сдвига, которое можно заменить эквивалентными приращениями нормальных напряжений

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij} &= \Delta\tau_{ij}, \\ \Delta\sigma_{w_{ij}} &= \Delta\tau_{w_{ij}}, \end{aligned} \quad (10)$$

причем соблюдаются равенства

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij} &= -\Delta\sigma_{ji}, \\ \Delta\sigma_{w_{ij}} &= -\Delta\sigma_{w_{ji}}, \end{aligned}$$

т. е. приращения нормальных напряжений антисимметричны.

Складывая с исходным полем напряжений σ_i , получим (рис. 7):

$$\begin{aligned} \sigma_{u_i} &= \sigma_i + \Delta\sigma_{ij} \cdot T_{ij} + \Delta\sigma_{ik} \cdot T_{ik}, \\ \sigma_{w_i} &= \sigma_i + \Delta\sigma_{w_{ij}} \cdot W_{ij} + \Delta\sigma_{w_{ik}} \cdot W_{ik}. \end{aligned} \quad (11)$$

На каждом из направлений i, j соответственно будем пользоваться известными формулами для средних напряжений, которые распространим на U-area и W-area:

$$\begin{aligned} \sigma_{n_{ij}} &= (\sigma_i + \sigma_j) / 2, \\ \sigma_{un_{ij}} &= (\sigma_{u_i} + \sigma_{u_j}) / 2, \\ \sigma_{wn_{ij}} &= (\sigma_{w_i} + \sigma_{w_j}) / 2, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\sigma_{n_{ij}}$, $\sigma_{un_{ij}}$, $\sigma_{wn_{ij}}$ — средние нормальные напряжения соответственно на общих, упругих и сдвиговых диагональных площадках с ориентацией i, j ;

σ_i , σ_{u_i} , σ_{w_i} — нормальные напряжения соответственно на общих, упругих и сдвиговых площадках с ориентацией i .

Соответственно, для касательных напряжений получаем соотношения

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= (\sigma_i - \sigma_j) / 2, \\ \tau_{u_{ij}} &= (\sigma_{u_i} - \sigma_{u_j}) / 2, \\ \tau_{w_{ij}} &= (\sigma_{w_i} - \sigma_{w_j}) / 2. \end{aligned} \quad (13)$$

На рисунке 8 показаны сдвиговые и нормальные напряжения на диагональной площадке с ориентацией i, j . Условно площадка разделена на две области — упругую и микросдвиговую, в каждой из которых действуют соответствующие нормальные и касательные напряжения. Определим нормальные напряжения в соответствии с рисунком 7. Для этого введем вспомогательные матрицы 2-го ранга для нормальных напряжений $\sigma_{u_{ij}}$, $\sigma_{w_{ij}}$, кото-

рые являются составными частями главных нормальных напряжений σu_i и σw_i на упругих и сдвиговых участках каждой из площадок ($i, j, k=1, 2, 3$). Эти напряжения выражаются по определению через уже ранее определенные касательные и нормальные напряжения $\tau u_{ij}, \tau w_{ij}, \sigma n_{ij}$ по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma n_{ij} + \tau_{ij} = \sigma n_{ik} + \tau_{ik}, \\ \sigma u_i &= \sigma u n_{ij} + \tau u_{ij} = \sigma u n_{ik} + \tau u_{ik}, \\ \sigma w_i &= \sigma w n_{ij} + \tau w_{ij} = \sigma w n_{ik} + \tau w_{ik}. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем вспомогательные переменные на основании рисунков 5–7:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma u_{ij} &= \Delta \tau u_{ij} + \Delta \tau u_{ji}, \\ \Delta \sigma w_{ij} &= \Delta \tau w_{ij} + \Delta \tau w_{ji}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда нормальные напряжения на направлении i, j можно найти по формуле

$$\begin{aligned} \sigma u u_{ij} &= \sigma_i + \Delta \sigma u_{ij}, \\ \sigma w w_{ij} &= \sigma_i + \Delta \sigma w_{ij}. \end{aligned} \quad (16)$$

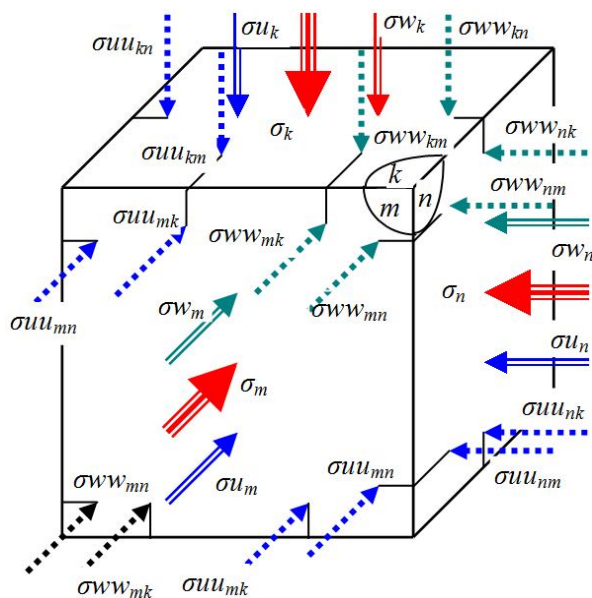


Рисунок 7 Совокупность нормальных напряжений на главных площадках в материале с микродефектами

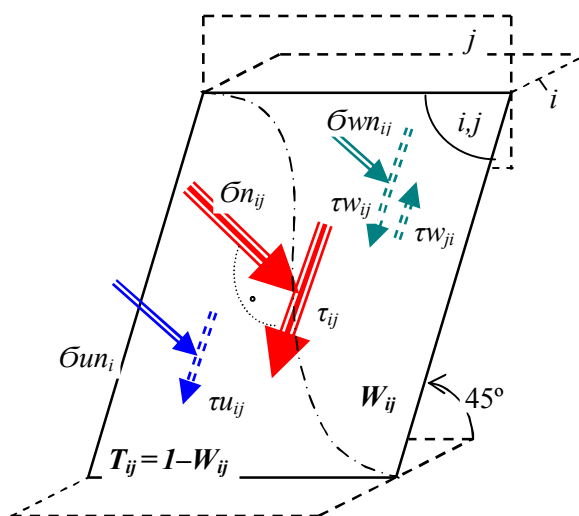


Рисунок 8 Совокупность касательных и средних напряжений на диагональной площадке i, j по направлению максимального сдвига τ_{ij}

Нормальные напряжения на диагональной площадке i, j будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} \sigma u_i &= \frac{\sigma u u_{ij} \cdot T_{ij} + \sigma u u_{ik} \cdot T_{ik}}{T_{ij} + T_{ik}}, \\ \sigma w_i &= \frac{\sigma w w_{ij} \cdot W_{ij} + \sigma w w_{ik} \cdot W_{ik}}{W_{ij} + W_{ik}}. \end{aligned} \quad (17)$$

В качестве контрольного уравнения используем основное соотношение между нормальными напряжениями на i -площадке:

$$\sigma_i = \sigma u_i \cdot Tc_i + \sigma w_i \cdot Wc_i, \quad (18)$$

где

$$Tc_i = 1 - Wc_i; \quad Wc_i = W_{ij} + W_{ik} + W_{ii}. \quad (19)$$

Таким образом, все напряжения в теле с микродефектами полностью определены. Отсюда видно, что наблюдаются равномерно рассеянные по всему объему тела значительные отличия напряжений на множестве мелких участков, приуроченных к микродефектам, что можно назвать фрагментацией напряжений. Такого же рода явления фрагментации были получены при изучении эволюции структуры ме-

таллов в процессе их деформации в пределах зерен или перлитных полуколоний при формировании кристаллографической текстуры [9]. В нашем случае фрагментация происходит в изначально однородном материале даже без исходной кристаллической структуры и обусловлена лишь термофлуктуационными процессами зарождения и роста ансамблей микродефектов.

6 Инженерный гистерезис при нагружении микродефектного тела

Вся совокупность напряжений в микродефектном теле существенным образом зависит от присущих для данного материала параметров прочности на сдвиговых и разрывных микродефектах.

Будем считать, что на сдвиговых площадках W_{ij} действуют касательные напряжения τw_{ij} , максимальное значение которых не может превышать некоторого предельного значения, обусловленного присущими для данного материала прочностными свойствами. В простейшем случае идеально пластичного материала касательные напряжения τw_{ij} на микросдвиговых дефектах W_{ij} ограничены прочностью на сдвиг Pw_{ij} и удовлетворяют неравенствам

$$-Pw_{ij} \leq \tau w_{ij} \leq Pw_{ij}, \quad (20)$$

где Pw_{ij} — предельное значение напряжений сдвига (прочность), Па.

Из (3) можно определить касательное напряжение на упругих площадках:

$$\tau u_{ij} = (\tau_{ij} - Pw_{ij} \cdot W_{ij}) / T_{ij}. \quad (21)$$

Равенство (21) будет справедливо при «простом» нагружении. Если, как это чаще всего наблюдается на практике, путь нагружения материала сопровождается разгрузкой (не обязательно однопараметрической), общая картина определения напряжений значительно усложняется. На рисунке 9 показаны закономерности изменения касательных τu_{ij} и τw_{ij} напряжений при изменении макронапряжения τ_{ij} . Графики построены при одном существенном допуще-

нии: размеры упругих T_{ij} и сдвиговых W_{ij} площадок остаются неизменными во времени, иными словами, они зафиксированы («заморожены»). Отказ от этого ограничения представляет собой особо сложную задачу, решение которой будет приведено в последующих публикациях. Проследим особенности изменения напряжений τu_{ij} и τw_{ij} в идеально пластическом теле при его нагружении сжатием и растяжением (рис. 9), т. е. при его нагрузке $\tau_{ij}^{\max} \geq \tau_{ij} \geq 0$ и разгрузке $-\tau_{ij}^{\max} \leq \tau_{ij} \leq \tau_{ij}^{\max}$.

При возрастании касательных напряжений τ_{ij} от 0 до предела пластичности Pw_{ij} напряженное состояние тела однородно, т. е. оно одинаково на упругих T_{ij} и сдвиговых W_{ij} участках: $\tau_{ij} = \tau u_{ij} = \tau w_{ij} \leq Pw_{ij}$. При дальнейшем росте $\tau_{ij} > Pw_{ij}$ касательные напряжения на дефектно-сдвиговых площадках (W -area) равны пределу пластичности $\tau w_{ij} = Pw_{ij}$, а на упругих площадках (U -area) касательные напряжения τu_{ij} становятся больше τ_{ij} , согласно равенству (21).

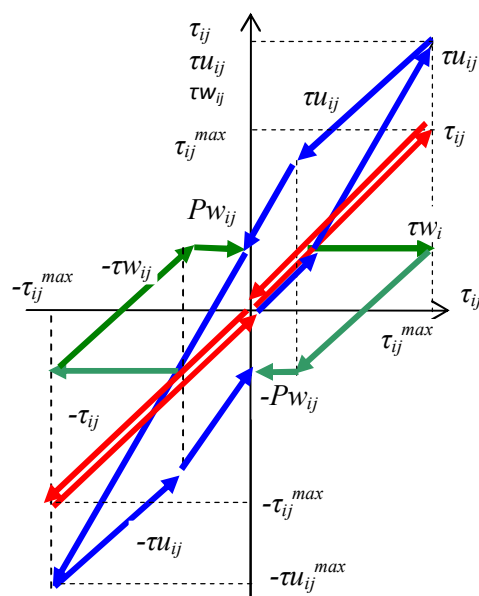


Рисунок 9 Петли гистерезиса для сдвиговых напряжений τu_{ij} и τw_{ij} при изменении касательных напряжений τ_{ij} в теле с идеальной пластичностью

При разгрузке путем снижения средних касательных напряжений в диапазоне $\tau_{ij}^{\max} > \tau_{ij} \geq Pw_{ij}$ напряжения τu_{ij} и τw_{ij} всюду снижаются по упругому закону подобно τ_{ij} вплоть до нижнего предела пластичности для $\tau w_{ij} = -Pw_{ij}$. В момент полного снятия внешней нагрузки при $\tau_{ij} = 0$ общая разгрузка тела не происходит: в упругой (*U-area*) области наблюдаются остаточные упругие напряжения $\tau u_{ij} = Pw_{ij}$, хотя в сдвиговой области сдвиговые напряжения снимаются $\tau w_{ij} = 0$.

Если продолжить разгрузку тела и перейти к его растяжению $-\tau_{ij}^{\max} \leq \tau_{ij} < 0$, получим графики, приведенные в третьем квадранте рисунка 9. Нетрудно заметить, что основные закономерности изменения напряжений τu_{ij} и τw_{ij} и их перераспределение между упругой и сдвиговой областями сохраняются. Вновь после полной разгрузки $\tau_{ij} \rightarrow 0$ наблюдаются остаточные напряжения в упругой области (*U-area*), где $\tau u_{ij} = -Pw_{ij}$, и в области *W-area*, в которой $0 > \tau w_{ij} < -Pw_{ij}$. Следовательно, такую циклическую смену разных ветвей изменения напряжений при нагрузке-разгрузке тела можно считать проявлением типичного инженерного гистерезиса. В отличие от классического, более сложный «инженерный гистерезис» обусловлен не остаточными явлениями в материале при смене направления нагрузки, а резким изменением его поведения в точках начала и конца достижения предела прочности на микросдвиговых участках.

Таким образом, если тело подверглось внешним нагрузкам τ_{ij}^{\max} , превысившим предел пластичности $\pm Pw_{ij}$, то после разгрузки в нем остается, как отпечаток предыстории нагружения, упругая область *U-area* с остаточными упругими напряжениями, равными $\pm Pw_{ij}$. Этот научный результат имеет не только теоретическое, но и большое прак-

тическое значение, позволяющее судить о предыстории нагружения твердого деформируемого тела и его дальнейшего поведения под нагрузкой. Особенную важность эта закономерность приобретает при циклических знакопеременных нагрузках материала, когда надо считаться с возникновением петли гистерезиса и рассеянием тепловой энергии на сдвиговых областях.

Однако нетрудно привести случай исключения из этого правила. Так, если тело на микросдвигах обладает хрупкими свойствами, т. е. в материале существуют закрытые микротрещины с сухим трением:

$$0 \leq \tau w_{ij} \leq f \cdot \sigma n w_{ij}, \quad (22)$$

где f — коэффициент трения; $\sigma n w_{ij}$ — нормальное напряжение на сдвиговой площадке w_{ij} , Па, и нет явно выраженного предела прочности на микросдвиговых участках, то петли гистерезиса отсутствуют (рис. 10).

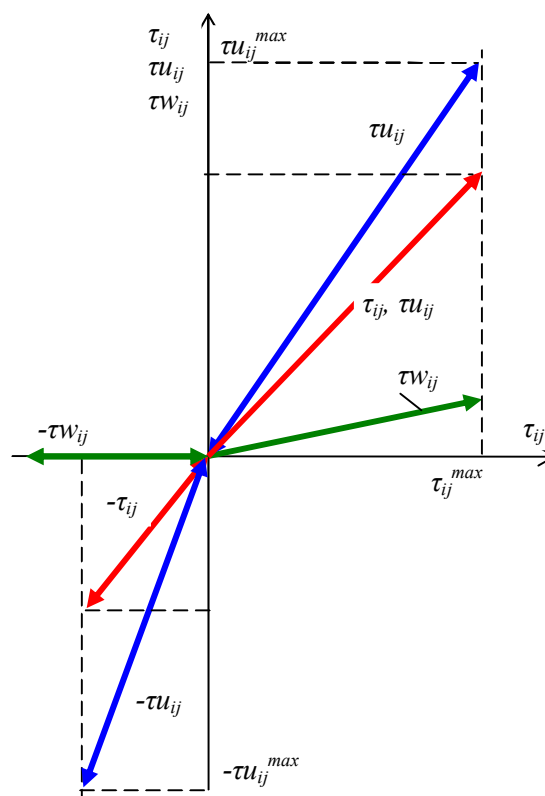


Рисунок 10 Зависимость сдвиговых напряжений τu_{ij} и τw_{ij} при изменении касательных напряжений τ_{ij} в хрупком теле с микродефектами без сцепления

При сжатии на сдвиговых микродефектах выполняется условие трения Кулона, а при растяжении берега микродефектов расходятся, и на них сдвиговые напряжения равны нулю. Соответственно, вырождаются графики изменения сдвиговых напряжений. Если на сдвиговом микродефекте нормальное среднее напряжение $\sigma n w_{ij}$ превышает удельную силу сцепления, петли гистерезиса отсутствуют, а диссипация энергии полностью исчезает.

Возможны и другие, более сложные случаи учета прочностных показателей материала, в частности те, которые наиболее полно можно учесть на основе аналитической теории прочности [11].

Пусть материал подчиняется уравнениям аналитической теории прочности [11], а его прочностные показатели в наиболее общем виде представлены в матричном виде:

– для упругих участков:

$$\tau 0 u_{ij}, \sigma 0 u_{ij}, \alpha u;$$

– для сдвиговых участков:

$$\tau 0 w_{ij}, \sigma 0 w_{ij}, \alpha w.$$

Тогда сдвиговые прочностные на упругих Pu и микродефектных Pw площадках с индексом i, j можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} Pu_{ij} &= \tau 0 u_{ij} (Sun_{ij} / \sigma 0 u_{ij} + 1)^{\alpha u}, \\ Pw_{ij} &= \tau 0 w_{ij} (Swn_{ij} / \sigma 0 w_{ij} + 1)^{\alpha w}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\tau 0 u_{ij}, \sigma 0 u_{ij}, \alpha u$ и $\tau 0 w_{ij}, \sigma 0 w_{ij}, \alpha w$ — реономные параметры прочности материала (соответственно когезия сдвига, когезия отрыва) и параметр хрупкости для упругих и сдвиговых участков тела [11].

На разрывах I рода, которые возникают в соответствии с термофлуктуационным кинетическим уравнением (см. последующие публикации), прочность определяется удельной когезией отрыва, которая входит в общую матрицу прочности второго ранга и занимает в ней место главной диагонали.

Матричное представление прочностных параметров позволяет полностью учесть

любую прочностную анизотропию материала, что весьма важно для неоднородных и анизотропных горных пород и каменных материалов, которые зачастую обладают слоистостью и направленной трещиноватостью.

В действительности далеко не всегда следует ожидать таких идеальных зависимостей напряжений, поскольку более часты «смешанные» или постепенные, по мере нагружения, переходы к более сложным проявлениям прочности на микродефектных площадках.

Если τ_{ij} изменяется знакопеременно или циклично в пределах $-\tau_1 \leq \tau_{ij} \leq \tau_2$, а на микросдвигах присутствует сцепление, то во всех случаях появляются замкнутые взаимосвязанные петли инженерного гистерезиса на сдвиговых и упругих участках. Петли гистерезиса для напряжений τu_{ij} и τw_{ij} характеризуют количество упругой и рассеянной энергии при циклическом деформировании материала. Сами по себе циклы напряжений зависят от того, по какой схеме нагружения осуществляется изменение макронапряжения τ .

При полной разгрузке материала в первом квадранте диаграммы нагружения на основании соотношений (7, 8), поскольку $\tau_{ij} \rightarrow 0$, получаем значения остаточных напряжений:

$$\begin{aligned} \tau w_{ij} &= -Pw_{ij}; \\ \tau u_{ij} &= Pw_{ij} / (1 - W_{ij}). \end{aligned} \quad (24)$$

Если разгрузка произведена после отрицательных значений внешней нагрузки $-\tau_{ij} \rightarrow 0$, то значения $\tau w_{ij}, \tau u_{ij}$ меняют знак на противоположный.

Это открывает путь для разработки новых схем неразрушающих испытаний материалов. При этом, обеспечивая различные режимы циклического нагружения образцов, получим циклы (петли гистерезиса) на упругих и сдвиговых микродефек-

тах и возможность с более высокой простотой и степенью достоверности определять угол внутреннего трения и удельную силу сцепления на микросдвигах, т. е. основные параметры реономного поведения материалов [11].

На данном этапе исследований обнаруженные закономерности возникновения петель гистерезиса при циклическом изменении макронапряжений могут быть использованы в программах по численному моделированию реономного поведения материала.

Выводы:

1. Стремление добиться как можно более точного описания аномалий напряжений вокруг микродефектов путем решения краевых задач теории упругости оказалось малоперспективным, что требует перехода к новым, более сложным математическим моделям квазиоднородной среды с равномерно распределенными по всему объему тела ансамблями микродефектов.

2. Анализ закономерностей аномалий напряжений вокруг микродефектов типа сдвигов и разрывов показал их сложность из-за краевых сингулярностей напряжений, трудно отслеживаемых переходов элементарных микроразрывов и сдвигов, а также их сочетаний.

3. Для математического описания ансамблей микродефектов предложено использовать матричное представление, причем для микросдвигов введены понятия главных (истинных — *true*) и встречных (ложных — *false*) сдвигов.

4. Предложена математическая модель определения комплекса касательных и нормальных напряжений на упругих (*U-area*) и сдвиговых (*W-area*) участках тела, кото-

рые условно объединяют рассеянные по всему объему микродефекты и упругие элементы между ними. При этом основополагающую роль в математической модели играют принятые на основе предварительных экспериментальных данных прочностные показатели материала. В качестве таких показателей удобно использовать принятые в аналитической теории прочности [11] когезии сдвига τ_0 , разрыва σ_0 и параметр хрупкости α .

5. Оценки напряженного состояния микродефектного тела показывают на микродефектных и упругих участках тела существенное различие сдвиговых и касательных напряжений, т. е. наличие явно выраженной их фрагментации. При этом их фрагментация возникает не только из-за внутрикристаллической текстуры материала, но и в случае ее гомогенности после возникновения микродефектов в результате термофлуктуационного внешнего воздействия.

6. При знакопеременном нагружении материала с амплитудой выше порога прочности на микросдвиговых участках проявляется явление инженерного гистерезиса, что приводит после полной разгрузки к остаточным напряжениям противоположного знака на микродефектных (*W-area*) и упругих (*U-area*) участках. За счет этого явления происходит сохранение предыстории нагружения твердого тела, что можно положить в основу разработки новых методов лабораторных испытаний материалов.

7. Задачей дальнейших исследований является изучение поведения твердого тела с учетом времени и температуры с позиций термофлуктуационной (кинетической) концепции.

Библиографический список

1. Шермергор, Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред [Текст] / Т. Д. Шермергор. — М. : Наука, 1977. — 400 с.
2. Екобори, Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел [Текст] / Т. Екобори. — М. : Металлургия, 1971. — 264 с.

3. Макклиток, Ф. Деформация и разрушение материалов [Текст] / Ф. Макклиток, А. Аргон. — М.: Мир, 1970. — 444 с.
4. Boudifa, M. A micromechanical model for inelasmic ductile damage prediction in polycrystalline metals for metal forming [Text] / M. Boudifa, K. Saanouni, J.-L. Chaboche // Int. J. Mech. Sci. — 2009. — V. 51. — P. 453–464.
5. Коллинз, Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ. Предсказание. Претворение [Текст]: пер. с англ. / Дж. Коллинз; под ред. Э. И. Григолока. — М., 1984. — 624 с.
6. Черепанов, Г. П. Механика разрушения [Текст] / Г. П. Черепанов. — М. — Ижевск: Изд. ИКИ, 2012. — 872 с. — (Математика и механика).
7. Сосновский, Л. Концепции поврежденности материалов [Текст] / Л. Сосновский, С. Щербаков // Вестник ТНТУ. — 2011. — Спецвыпуск. — Ч. 1. — С. 14–23.
8. Биргер, И. А. Детерминированные и статистические модели суммирования повреждений [Текст] / И. А. Биргер // Проблемы прочности. — 1978. — № 11. — С. 3–11.
9. Золотаревский, Р. Ю. Фрагментация и текстурообразование при деформации металлических материалов [Текст] / Р. Ю. Золотаревский, В. В. Рыбин. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. — 208 с.
10. Литвинский, Г. Г. Ансамбли и структуры микродефектов в твердом теле (горной породе) [Текст] / Г. Г. Литвинский // Сб. науч. трудов ДонГТИ. — Алчевск: ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ», 2022. — № 26 (69). — С. 5–15.
11. Литвинский, Г. Г. Аналитическая теория прочности горных пород и массивов [Текст] / Г. Г. Литвинский. — Донецк: Норд-Пресс, 2008. — 207 с.

© Литвинский Г. Г.

**Рекомендована к печати д.т.н., проф., зам. директора
института РАНМИ АН ДНР Дрибаном В. А.,
к.т.н., доц., проректором по научной работе ДонГТИ Смекалиным Е. С.**

Статья поступила в редакцию 01.06.2022.

Doctor of Technical Sciences, Prof. Litvinskiy G. G. (DonSTI, Alchevsk, LPR, ligag@ya.ru)

FRAGMENTATION OF STRESSES IN THE BODY WITH MICRODEFECTS

The desire to increase the description reliability of the materials behavior under thermomechanical influences requires a transition to increasingly complex mathematical models. This paper presents a new model of the stress-strain state (SSS) of a solid with microdefects under its arbitrary loading. Based on a qualitative analysis of distribution regularities of the microdefects of shift and fracture type, the stress anomalies in their vicinity are assessed. The parameters of the mathematical model of SSS, the main prerequisites and limitations are selected and justified. The influence of strength indicators on microshifts and fractures is considered and assessed. The fragmentation of stresses over the entire volume of the body caused by microdefects is proved. For the first time, a system of SSS equations was obtained, micro-mechanisms of the hysteresis loops formation under alternating loading of the body were shown, the difference in stresses on elastic and defects body areas was assessed.

Key words: microshift, microfracture, SSS theory, mathematical model, elastic and microdefects areas, stress fragmentation, strength parameters, hysteresis loops.